TYPIKUS HIBÁK A MATHEMATIKAI TANITÁSBAN.*

A legkedvesebb elismerés, a mely a munkást érheti, a pályatársak elismerése. Ebben láthatjuk, hogy munkásságunk nem volt hiábavaló, mert mások és pedig szakférfiak, sikeresnek tekintik; de ebben erősödik meg egyúttal a jövőbe vetett hitünk és bizalmunk, mert hiszen az elismerés egyúttal azt is jelenti, hogy még várnak tőlünk további munkásságot is. Engedjék meg nekem, hogy a tisztelt Társulat részéről rendes taggá való megválasztásomban ért kitüntetést, melyért meleg köszönetet mondok, ne csak, mint a multban kifejtett csekély munkásságom jutalmazását, hanem egyúttal mint jövendőbeli tevékenységemben vetett megtisztelő bizalmuk jelét tekinthessem. Sajnos, ez a munkásság nem terjedhet ki az elméleti pædagogiai kérdések tervszerű művelésére, a mire pedig nálunk igen-igen nagy szükség volna; de a mennyiben minden tanítónak, legyen az elemi iskolai, vagy egyetemi: a tanítás csak eszköz, és hazánk jövendő polgárainak *nevelése* a főczél, és a mennyiben minden tanítás sikere attól függ, hogy tudományát miképen tudja a tanító a tanuló lelki képességeinek, fölfogásának megfelelő formában, az egész szellemi tartalmába beleilleszteni, szerves egészszé összeforrasztani, szóval a pædagogiai elmélet által részben megteremtett, részben jóváhagyott gyakorlatnak megfelelően közölni; ennyiben remélhetem, hogy a társulat elveinek megfelelően működhetem tovább is a pædagogiai gyakorlat terén.

Bocsánatott kell kérnem, hogy e társulatban majdnem szakszerű kérdésekkel foglalkozom; de úgy vélem, hogy mindenikünknek az a kötelessége, hogy a saját foglalkozása szűk körében keresse meg azokat a pædagogiai természetű problemákat, a melyeket, épen, mert a maga szakjában könnyebben kezelheti őket, talán némi sikerrel tárgyalhat és ezzel az általános pædagogiai kérdések tárgyalásához anyagot szolgáltat.

A természettudós tudja, hogy hiba nélkül észlelet nem gondolható. Azért vizsgálatainál előre megállapítja azokat a határokat, melyek között az észlelési hibák mozoghatnak és másra nem is törekszik, minthogy e, kétségtelenül hibás észleleti adatokból kiszámítsa a legvalóbbszínű eredményt. Ha azonban azt tapasztalja,

* Fölolvasta szerző a M. Pæd. Társ. 1900. évi okt. 20-iki ülésen.

hogy az észlelet hibái következetesen a megszabott határokon túl vannak, akkor keresi azokat az okokat, a melyek e hibákat előidézhetik. A sociologus, a nemzetgazda, a politikus sem tesz különben. Hibák, vagy miként a társadalmi téren mondhatjuk, bűnök, vétségek, mindig voltak és mindig lesznek. Ezek ellen rendkívüli intézkedésekre emberi mivoltunk miatt nincs szükség. De ha e hibák, e bűnök, mint sajnos, sokszor tapasztalhatjuk, nagyobb számban fordulnak elő, nagyobb méreteket öltenek, vagy egyes irányokban következetesen fejlődnek, akkor igenis foglalkozni kell velük.

A tanítónak, a szülőnek, a nevelőnek is erre az álláspontra kell helyezkednie. Különös figyelemmel kell kisérnie azokat a hibákat, melyek makacsabbak, jelentősebbek, tervszerűbbeknek látszanak a közönséges apró hibáknál és nem szabad elmulasztania e hibák okainak gondos kutatását, és a kellő diagnózis után azok orvoslását.

Ezuttal, hogy elég biztosan járhassak, sokkal, de sokkal, szűkebb határok közé szorítom a tárgyalásomat. Nem erkölcsi hibákról és vétségekről szólok, csak gondolkozásbeliekről. És nem is a gondolkozás általános hibáival foglalkozom, hanem csakis azok egynémelyikével, a melyek a mathematikai tanításban, s a mathematikai gondolkozásban szerepelnek. Minthogy azonban a mathesis a legegyszerűbb tere a logikai alkalmazásoknak, remélem, hogy mások az általam tárgyalandó szűk kérdések keretén túl fognak emelkedni és a kérdést általánosabb szempontból tárgyalhatják.

Nincs olyan tanító, a ki ne tapasztalta volna, hogy a mathematikai tanításban bizonyos hibák évről-évre ismétlődnek s nem csak egy-két tanulónál, hanem rendszerint a tanulók szokatlan nagy számánál. Ezeket a hibákat a közönséges, lépten-nyomon elkövetett apróbb, egyeseknél, úgy mondhatjuk esetlegesen előforduló hibáktól megkülönböztetésül, *typikus* hibáknak akarjuk nevezni. E typikus hibák egynémelyikére rá akarok utalni és pedig a tanítás és a mathematikai gondolkozás különböző területein.

Kezdem az egyszer-egygyel. Ki nem tudja, hogy az egyszeregynek vannak kiváló nehéz részletei, a melyeket a gyermekek legnehezebben tanulnak meg és a melyeket legkönnyebben összetévesztenek. Ilyen pl: a 6-szor 7, 7-szer 8, 6-szor 9. stb. Különösen ezt a két utóbbit szokták legtöbbször összecserélni a tanulók.

Miért? Talán nem csalódom, ha azon nézetemnek adok kifejezést, hogy azért, mert ezek igen közel vannak egymáshoz és az ilyen nagy számok individualis elkülönítése akár a szemlélet, akár más individualis tárgyalással nem lehetséges. — A jó tanítónak ismernie kell e kényes részleteket és rájuk kiváló gondot kell fordítania.

Igen érdekes, hogy a tanulók a számlálásban is minő hibát követnek el. Észrevettem, hogy egy tanító sokat számláltatott százával. Azonnal felmerült az az aggodalom, hogy a tanulók nem elég biztosak a számlálásban.

Türelemmel számláltattam egy kiváló tehetségű gyermekkel babot. A századik után kissé habozott, s a következő szemre azt mondta: kétszáz. Typikussá vált ez a hiba; de csakis a tanító hibája miatt. Ugyancsak a számlálás érdekes typikus hibáját tapasztaltam a középiskolába lépő tanulóknál. Sokszor tanítottam első osztályban, és rendszerint tapasztaltam, hogy sok tanuló 1099 után 2000-et mondott; de volt olyan is, a ki már 109 után 200-at mondott. Ez is csak azért volt typikus, mert a számlálás ezen nevezetes zátonyaira a tanítók nem fordítanak elég gondot. Nem is akarom említeni azokat a typikus hibákat, a melyek a számok írásánál felmerülnek, ha több 0 van a számban.

Typikus hibának tekinthető az is, hogy a tanulók sokszor beljebb írják a részletszorzatot, a helyett hogy kifelé írnák, jobbra teszik a tizedes pontot, a helyett, hogy balra tennék, a melyek mind abból erednek, hogy csakis mechanikus számításra szoktatták őket és ebben az *ösztönszerű* működésben sokszor megesik, hogy a gépezet megakad és nem áll rendelkezésükre a kisegítő gépész: a helyes értelem.

Elméleti szempontból is igen nevezetesek azok a typikus hibák, a melyeket a középiskolában a törtszámokkal való műveleteknél tapasztalunk. Ha azt kérdezzük, hogyan számítják ki 1 kg adott árából $^3/_4$ kg árát, igen sokszor halljuk azt a feleletet, hogy $^3/_4$-el elosztjuk az 1 kg árát. Nyilván onnan ered ez a válasz, mert az $^1/_4$ kg árát úgy kapja meg a gyermek, ha az 1 kg árát 4-gyel osztja és hirtelenében hamis analogia szerint következtetett. Fordítva, ha $^3/_4$ kg áráról 1 kg-éra kell következtetnünk, igen sokszor halljuk azt, hogy $^3/_4$-el kell szorozni. Itt meg nyilván onnan ered a tévedés, mert többnek az árát rendesen szorzással kapja meg. Az sem ritka eset, hogy a tanulók azt hiszik, hogy a tört értéke nem változik meg, ha a számlálóhoz és a nevezőhöz egyenlő számokat adunk. Rögtön belátható, hogy itt is a hamis analogia vezeti félre a gyermeket.

Az oszthatósági viszonyok tárgyalásánál sokszor volt alkalmam hallani, hogy azt *nem lehet megtudni*, hogy valamely szám osztható-e 7-tel. Ebben is természetesen a tanítás hibája nyilvánul, a mely tudákosan foglalkozik olyan dologgal, a mivel nem is kellene foglalkoznia és azokat az egyszerű oszthatósági kriteriumokat mint az oszthatóság egyedüli ismertető jeleit tanítja, holott az igazi ismertető maga az osztás.

Igen nagy ingadozást észlelünk a tanulóknál a mértékek átszámításánál. Nem elég biztosak abban, hogy mikor kell a váltószámmal sokszorozniok és mikor kell osztaniok. Épen így sokszor tévednek a 25-tel, 125-tel stb. való gyorsabb fejszámolásokban, a melyeknél a szorzást és osztást gyakran fölcserélik. Mindkettőnél megint az értelem nélküli mechanismus okozza a zavart.

A leggyakrabban tévednek a tanulók az arányosságon alapuló számításoknál, különösen, ha ezt, az értelemfejlesztés szempontjából megbecsülhetetlen, kiváló anyagot nem használja fel a tanár a maga igazi rendeltetésére, hanem a laikusokat megtévesztő gyorsszámolás mechanismusainak elsajátítására. A főhiba itt az, hogy ettől fogva a tanuló minden feladat megoldásánál proportiókat állít fel, nem is gondolva arra, hogy két mennyiség a világon a legtöbb esetben nem arányosan változik. A második hiba, hogy az egyenes és fordított arányosságban igen sok tanuló bizonytalan és a kettő közötti habozásában sokszor egészen elveszti maga alatt a talajt. Ezek a typikus hibák természetesen minimumra redukálódnak, ha a számtani oktatásnál főczélunknak az értelmes, gondolkozó, következtető számítást tekintjük.

Arra is bukkantam hosszú számtanitanítási gyakorlatom alatt, hogy a tanuló olasz praktikát akart alkalmazni olyan esetben is, midőn a két mennyiség között fordított arány van. Ennek okát abban lelem, hogy tanáraink sőt majdnem kivétel nélkül tankönyveink sem mondják meg határozottan, hogy ez az eljárás csakis egyenes arányosság esetében alkalmazható.

De nem folytatom tovább ezt a listát, ámbár a számtani oktatás bőven terem még ilyen typikus hibákat a kamatszámításnál, és főként a diskontszámításnál, mely tankönyveinknek még ma is egyik leggyengébb oldala, az értékpapirszámításnál stb; de ezek jórészt az előbb említettekhez hasonlók.

Az algebrai tanitás még bővebben terem typikus hibákat. Nehogy türelmüket túlságosan igénybe vegyem, csak egynehányra szorítkozom. Kérdezzék meg az algebrai tanítás első óráiban, hogy a egész szám után melyik következik a természetes sorban. A gyengébb tanulók túlnyomó része azt fogja mondani: b. A negativ számokkal való műveletnél igen gyakoriak a hibák. Érdekes pl. az, hogy ha a tanuló a negativ általános számot biztosan és helyesen vonja is le és soha sem téveszti el, hogy $a-(-b)=a+b$; de a numerikus példákat elhibázza és $8-(-5)$-re hamarosan azt mondja 3. Miért? Azért, mert a kivonás fogalma nála szorosan kapcsolatos a kevesbbedés fogalmával, tehát az első pillanatra felötlő 3-at, a mely a 8-nál kevesebb, megfelelőnek véli. A műveleteknél a leggyakoribb typikus hibák az $(a+b)^2=a^2+b^2$; $(a-b)^2=a^2-b^2$, $(a+b)(c+d)=ac+bd$, az $(ab)c=ac.bc$, $\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}$ az $x^m x^n=x^{mn}$ és $(x^m)^n=x^{m+n}$ stb. Érdekes typikus hiba, a mit különben olyan egyénnél tapasztaltam, a kinek már nem volna szabad ilyen hibát elkövetnie, az, hogy egy háromtagú köbének megalkotásánál a 6 abc tagot következetesen kihagyta. Nyilván a kéttagú köbének analogiájára alkotta meg a formuláját.

Ilyen hamis analogiát találtam egyébként más helyen is, a hol több tudákossággal, mint tudománynyal, a középiskolában a determinánsokat tanították és a harmadrendű determinans kifejtésére szolgáló u. n. *Sarrus*-féle eljárást minden aggodalom nélkül alkalmazták a negyedrendű determinans kiszámítására is, holott erre egyáltalában nem alkalmazható.

Jól kell a tanárnak azokat a typikus hibákat ismernie, a melyek az egyenletek megoldásánál fellépnek. Ha az $x+a=b$ és $\frac{x}{a}=b$ alakú egyenleteket már hibátlanul oldják meg a tanulók, még mindig hibát ejtenek az $a-x=b$, az $\frac{a}{x}=b$ egyenletek megoldásánál.

A geometria tanításánál egészen más természetű typikus hibák szerepelnek. Ezeket két osztályba sorozhatjuk: az egyikbe azokat tehetjük, melyek a szemlélet hibás voltából, vagy a szemlélet túlbecsüléséből erednek, a másikba pedig azokat, a melyek inkább logikai tévedések, a deductio hibái. A tanulók a felső osztálybeli geometriai tanítás első fokán a bizonyítások iránt természetes ellenszenvet éreznek. Nem tudják és nem akarják belátni ennek a szükségességét: mert hiszen úgyis *látják* vagyis inkább látni vélik a geometriai viszonyokat. De ezek a szemléletek sokszor inkább topographiai szemléletek, azaz olyanok, melyek egy-egy geometriai alakra vonatkozók, mintsem olyanok, a melyek igazi geometriai, tehát teljesen általános érvényű szemléletek. Ezúttal nem akarok a szemlélet hibáival foglalkozni, az inkább a rajztanítás szempontjából érdekes. Ennek kell a tanulókat a helyes látásra és a tiszta szemléletre szoktatnia és különösen az esetek nagy számából a szemlélet általános elemeinek elvonását előkészítenie. Csak egy-kettőre utalok. A stereometria tanításában sokszor tapasztaljuk, hogy a tanulók a téralakzatok helyzetéről hamis szemlélettel bírnak. Azt hiszik, hogy az egyenesre egy pontjában a térben is csak egy merőleges vonható és hogy ha az egyenes a sík egyik egyenesére merőleges, a síkra is az. Ajánlom, hogy próbálják meg szaktársaim ennek igazolásául a következőt. Huzzanak a táblán egyenest és adjanak a tanuló kezébe pálczikát azzal, hogy helyezze ezt az egyenesre merőlegesen a térben. Bizonynyal az esetek túlnyomó többségében a táblára is merőlegesen helyezik és némi meglepődéssel látják, hogy másképpen is tehették volna. Ugyanilyen tévedést fognak tapasztalni, ha a pálczikát az asztal lapjával párhuzamosan helyeztetik. Bizonynyal az asztal szélével hozzák párhuzamos helyzetbe.

A stereometriában fellépő legnagyobb tévedésnek tekinthető, hogy a tanulók legtöbbször azt hiszik, hogy a szimmetrikus testek egyuttal egybevágók is, hiszen még tankönyvben is szerepel ez a tévedés. Világos, hogy a hamis analogia vezeti ebben a tanulót, mert a síkban tényleg egybevágók a szimmetrikus idomok. Sohase szabadna elmulasztanunk Kant példájának a felemlítését, hogy a jobb keztyű nem húzható a balkézre. A hamis analogiának érdekes esete található egy tankönyvben, a hol a sokszög felezését úgy végzi a szerző, hogy átalakítja háromszöggé és a háromszög felező vonala által a sokszöget is megfelezettnek véli.

De nem folytatom a szemléletből eredő tévedéseket. Hogy miképpen kell ellenük védekeznünk, az nyilvánvaló. Pontos szemléletre kell szoktatnunk a gyermeket. Ez az első kivánság. Ezenkívül pedig arra kell ügyelnünk, hogy a szemlélet változatos legyen. Ne elégedjünk meg egyes, specialis helyzetek, egyes specialis alakzatok szemléltetésével, ne hagyjuk az egyszer véletlenül felrajzolt ábráinkat utánozni, hanem lehetőleg variáljuk ábráinkat és pedig nemcsak különféle alakok felrajzolásával, hanem azzal is, hogy az idomokba mozgást (az alkotórészek eltolódását) viszünk bele.

A tévedések másik csoportja logikai természetű. Leginkább abból ered, hogy a tanulók a tételeket könnyelműen megfordítják. Abból, hogy az egyenlőszárú háromszög egyuttal egyenlőszögü, azonnal következtetik, hogy az egyenlőszögű háromszög egyenlő szárú. Talán nem lesz felesleges, ha a geometriai bizonyításoknál rendszerint szereplő tételek logikai kapcsolatára ráutalok. E négy tétel a következő: 1. A est B, 2. non A est non B, 3. B est A, 4. non B est non A. Ezek közűl csak kettőt kell bizonyitani; mert ha igaz az 1-es, igaz a 4-es is és viszont. Épen így a 2 és3 együttesen érvényes. Megjegyzem, hogy a tételek ezen összefüggését azonnal beláthatjuk, ha a fogalmak köreit, nem mint a közönséges módon szokás, síkon, hanem gömbfelületen ábrázoljuk. Ha ugyanis a gömbön megrajzoljuk az A körét, akkor a gömb másik zónája ábrázolja a *non* A fogalom körét és ha az A zónája benne van a B zónájában, akkor a non B zónája egészen benne van a *non* A zónájában. s. i. t. Az 1-es és 4-es valamint a 2-ős és 3-as mindig együtt érvényes. De az 1-ből a 3 nem következik, azt külön kell bizonyitani.

A tévedések egész sorozatát találjuk a geometria formális részében, a melyek épen olyan typikusak, mint az algebrában jelenkezők. Csak egynehányra akarok rámutatni. Ezek a következők: $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sin\alpha$, valamint a sinus-tétel hibás formája $a : b = \alpha : \beta$ stb, melyek mindegyikénél a hamis analogia, még pedig legtöbbször a tisztán az emlékezetre bízott hibás mechanismusból eredő vezeti félre a tanulót. A typikus hibák egész lánczolatát mutatja a mathematika fejlődése is. Ugyszólván a tudomány haladásának egyik útja a hamis analogiák kiküszöbölését czélozza. Csak egynehányra akarok ráutalni. Az első, a mely philosophiai szempontból is érdekes, abban a görög sophismában jelentkezett, hogy Achilles nem érheti el a teknős békát. Miben áll ez a tévedés? Az okoskodás a következő: Ha Achilles el akarja érni a teknősbékát, meg kell tennie azt az utat, a mennyivel a teknős béka előtte van. Ehhez idő kell. Ez alatt a teknősbéka megint előbbre kerül. Achillesnek most ezt az utat kell megtennie... Ehhez ismét idő kell s. i. t., végtelen sok idő kell. Már pedig *végtelen sok idő, együtt végtelen nagy idő* tehát soha sem éri el. A tévedés az aláhuzott állításban van, a mint a mathematikus azonnal észreveszi, hogy itt egy végtelen geometriai sorról van szó, melynek hányadosa 1-nél kisebb; tehát convergens.

A mathesis számos ilyen tévedést tüntet fel. Kérdéseiben és feleleteiben egyaránt. Sokáig keresték a negyedfokúnál magasabb egyenletek megoldását gyökvonásokkal, mígnem a jelen század a hamis analógiának ezt a kisérletezését teljesen beszüntette, mert Ruffini, Abel és Galois vizsgálatai kimutatták, hogy csak igen speciális esetekben lehetséges a problemának ilyen megoldása.

Az analytikai vizsgálatoknak, egy érdekes typikus hibája nyilvánult a végtelen sorok használatában. Már a tizenhetedik században gyakran használták a végtelen sorozatokat; de az a kérdés, hogy convergens-e a sor, vagy nem, a mathematikusokat nem igen foglalkoztatta. A kik e kérdést fölvetették, azok is elégségesnek tartották azt, hogy lim $a_n = o$ legyen, bár már *Bernouilli* János az ellenkezőt megmutatta egy általános feltünést keltett példán. *Euler, Lagrange* s a többi kiváló lángelméjű mathematikusok is természetesnek tartották, hogy a végtelen sok tag összege is épen úgy viselkedik mint az összeg általában, és e hamis analogia által félrevezetve, nem is gondoltak arra, hogy ez esetben az összeg legprimitivebb tulajdonsága: tagjainak fölcserélhetősége sokszor áldozatul esik. Csak a genialis prágai mathematikus Bolzano és az ujabb analysis valódi apja Cauchy tárgyalták behatóan a sorok convergentiájának kérdését és csak e század derekán foglalkoztak Dirichlet és Riemann a tagok fölcserélhetőségének kérdésével. Azt mondhatjuk, hogy a végtelen sorok tanának fejlődése voltaképen egy állandó küzdelem volt a közönseges összegek törvényeinek analogiája ellen.

Egy másik, igen érdekes typikus hibája nyilvánult az analysisnek a differencziálás fejlődésében. Itt a már említett hibás megfordítás nyilvánult. Hamarosan beláták, hogy minden differencziálható föggvény folytonos, sokáig uralkodott az a hibás megfordítás, hogy minden folytonos függvény differencziálható. Egy physikusnak, Ampère-nek jutott eszébe, hogy ezt az állítást voltaképpen bizonyítani kellene; de természetesen bizonyítani nem tudta; mert miként e század legujabb különösen *Weierstrass* vizsgálataiból kiderült; e kettő: a folytonosság és differencziálhatóság két, lényegesen különböző jellemvonása a függvények egyes osztályainak. Épen ilyen hibás megfordítás nyilvánult magában a függvény fogalmának a megállapitásában. Minthogy ugyanis az x minden analytikai alakja az x függvényének tekinthető, magától értetődőnek vették, hogy minden tetszésszerinti függvény analytikai alakban állítható elő és *Fourier* a physikus ezt az analytikai előállítást már megtalálni vélte. Csak később, különösen *Dirichlet* vizsgálatai mutatták meg, hogy az y-nak x-től való függése és a Fourier által jelzett analytikai alakban való előállítás, — sőt talán minden analytikai alakban való előállítás — két lényegesen különböző dolog.

A hamis analogiai vezette *Lagrange*-ot akkor is, midőn az egész függvények mintájára minden folytonos függvényt Taylor sorban előállíthatónak tartott, holott *Cauchy* és később pontosabban *König* Gyula és *Pringsheim* kimutatták, hogy ehhez az előállításhoz a folytonosság nem elég, még a differenczialhatóság sőt a végtelen sok differencziálhányados előállíthatása sem elegendő.

De nem folytatom tovább a mathematikai tudományok fejlődésében nagy szerepet játszó typikus hibák felsorolását. Csak arra utalok, hogy ma már az existentia tételek egész sorával védekezik a mathesis az ilyen hibák ellen. Nem elégszik meg azzal az analogia által nyujtott igazsággal, hogy minden algebrai egyenletnek van gyöke, hanem *Gauss* tényleg bebizonyítja, hogy minden algebrai egész függvény felbontható első és másodfokú tényezőkre; nem elégszik meg azzal az analogia tétellel, hogy minden differencziálegyenletnek van megoldása, hanem *Cauchy* bebizonyítja, hogy a normális esetekben ilyen megoldás tényleg létezik, és e vizsgálatai folyamán rájött azokra a szükséges föltételekre, melyek mellett a szóban forgó analogia szerinti következtetés tényleg elvégezhető. Sőt még egy lépéssel tovább megy. Nem elégszik meg azzal, hogy bizonyos dolgok létezését megmutatja, hanem gondoskodik arról, mint *Kronecker* követeli, hogy meghatározásai ne állapodjanak meg a logikai formáknál, hanem mathematikai testet öltsenek, a mennyiben a tényleges előállításra szolgáló utat is megjelöli: a logikai evidentiából a realis evidentia területére lép.

Foglaljuk össze a tárgyalásunkat. Az elemi oktatástól fel egészen a legfelsőbb mathematikai oktatás birodalmáig kalandoztunk át a mennyiségtudomány területein és mindenütt bukkantunk olyan typikus hibákra, a melyek nem az egyén, nem is a tanító, hanem inkább a tárgy és az emberi gondolkozás hibái. Ezek rendszerint három forrásból eredtek: A tévedések egyik csoportja, talán a legtöbb, hamis, vagy elhamarkodott analogiából ered, azaz abból, hogy a föltételeket más esetekben fennálló föltételekkel megegyezőknek véljük, holott a teljes megegyezés hiányzik. A tévedések másik csoportja a következtetés hibája és legtöbbször a tétel hamaros, elhirtelenkedett megfordításából ered. A harmadik csoport a szemlélet hiányosságából származik.

A legfontosabbnak tartjuk a hamis analogiából eredő tévedéseket. Miképpen lehet ezeket elhárítani? Az analógiák kiküszöbölésére természetesen gondolni sem lehet: a tudományos kutatásnak és a tanítás methodusának is legfontosabb eszközei ezek. Még a reductiójukra sem gondolhatunk, mert hasznavehetőségük minden kétségen felül áll. De a tévedésekben nyilvánuló hamis analogiák ellen igenis védekeznünk kell. A legjobb védelem a feltételek pontos és gondos megállapítása, a feltételekben mutatkozó különösségeknek szigorú kidomborítása és a mechanikus, értelem nélkül való számítások és következtetések lehető kiküszöbölése, Nem szeretném, ha félreértetném. Jól tudom, hogy a számolásnak és szerkesztésnek vannak olyan elemei, a melyeknek mechanikusakká kell válniok. Az a tanuló, a ki az egyszeregyet érti, de mechanikusan nem tudja használni, rossz számoló. Épen olyan rossz szerkesztő, a ki az egyenes közt nem tudja gondolkozás nélkül megfelezni. De egyrészt e mechanikussá való ismeretek számát minimumra kell redukálni, másrészt pedig magának a mechanismus elsajátításának is értelmesnek kell lennie. Mielőtt mechanikussá válik egy-egy részlet, előbb jól át kell értenie a tanulónak, hogy esetről-esetre agyvelejének abból a zugából, a hol az ösztönszerű készségek között tartózkodik, a tudatos functiók közé emeltessék.

A hamaros megfordítások elleni védekezés sokkal könnyebb. Elégséges, ha esetről-esetre az egyes tételek megfordíthatatlanságát a tanulónak tényleg bemutatjuk és a magasabb osztályokban a tételek logikai kapcsolatára is utalunk. Végre a szemlélet hibáiból eredő tévedések ellen a küzdelemben támogatásunkra lesz a jól vezetett rajztanítás, a melynek hogy a mainál nagyobb szerepe legyen ifjuságunk nevelésében, mindnyájunk buzgó kivánsága.

Ezzel kapcsolatban rá akarok utalni a hibák módszertani kezelésére is. Általában az az elv érvényes, hogy a hibákat gondosán kerülnünk kell, s ha felmerülnek, iparkodnunk kell azokat hirtelenében a feledés homályába sülyeszteni, mert ha a tanár bővebben foglalkozik a hibákkal, a tanuló lelkében jobban megragad a hibás, mint a helyes dolog. A mathesis ebben a tekintetben kedvező helyzetben van. Egyrészt az által, hogy itt majdnem minden egyes esetben a hibák száma véges, nem mint irodalmi szakoknál, a hol végtelen. Majdnem mindig előre felsorolhatjuk, hogy a tanulók minő hibákat fognak ejteni. De előnyben van azzal is, hogy a hibát a tanítás hasznára lehet fordítani, valamint a mathematika tudományos fejlődésében is a hibák kiküszöbelésével érjük el a legérdekesebb eredményeket. Minden egyes hiba megállapítása, a hibás eredménynek a helyestől való eltérése, a hiba okának és helyének kutatása új meg új feladatokat szolgáltat.

Végül még csak egy dolgot. A hibák elkerülésének, vagy azok minimumra szállításának legfontosabb kelléke az, hogy a tanár a hibákat ismerje, felismerje és azok okait türelmesen keresse. E keresésnél én mindig azt az elvet követtem, hogy először a magam eljárásában, azután a tárgy természetében és csak harmadsorban kerestem a növendékben a hibát. Azt hiszem ez a legjobb eljárás nem csak a gondolkozásbeli, hanem egyéb hibák felismerésére és orvoslására is.

BEKE MANÓ.

EÖTVÖS NÉZETEI AZ OKTATÁSRA VONATKOZÓ ÁLLAMI JOGOKRÓL ÉS KÖTELESSÉGEKRŐL.

(Befejező közlemény.)

III. Állami jogok és kötelességek a főiskolai oktatás terén.*

Az államnak az oktatáshoz való viszonya szerint nemcsak az a kötelessége, hogy az elemi oktatásban minden polgárát részesítse és a középoktatás élvezetét lehetővé tegye, hanem köteles kiterjeszteni figyelmét az oktatás legmagasabb ágára, a tudományos

* I. Tj. a pesti kir. magyar egyetem újból szervezése tárgyában. — Ennek indokolása. — II. Tj. a kolozsvári orsz. egyetem felállítása tárgyában. — Ennek indokolása. — III. Tj. a pesti József-műegyetem újból szervezése tárgyában. — Ennek indokolása. — Mindhármat beadta 1870. b. E. J. v. és k. m.