

## A GRAFIKAI MÓDSZER ÉS ÚJABB IRODALMA.

1. Bevezetés. 2. A grafikai módszerről. 3. Az alsófokú tanításban való alkalmazás. 4. A középső fokú tanításban való alkalmazás. 5. A felső fokú tanításban való alkalmazás. 6. A grafikai módszer az alkalmazott matematikában.

1. Csak lassan válik tudatossá, hogy a matematikai tanítás terén mai nap hirdetett reformeszmék tényleges keresztülvitelének a grafikai eljárás a legfontosabb segédeszköze. Legtöbbször egyoldalúan fogalmazzák meg e módszer jelentőségét, sokféle alkalmazhatóságának egy különös példáját helyezvén az előtérbe; de még ma is találkozhatunk olyan kísérletekkel, melyekben ez a módszer csak megalkuvásból külső díszként szerepel. A címben jelzett új irány a legutolsó években a dolgozatok és segéd munkák bőséges sorozatát hozta létre;<sup>1</sup> tankönyveink is sorra feldolgozzák menetükben azokat a legismeretesebb alkalmazásokat, melyekre a külföldön és a hazánkban alakult reformbizottságok reautáltak. Mindazonáltal még korántsem mondhatjuk, hogy a közel tízéves fáradozások elérték igazi céljukat, hogy az új gondolatok és módszerek *szervesen* áthassák az egész tanmenetet, vagyis hogy módszeres *fokokatban* teljesítsék az új követelésekben kifejezett mind elméleti, mind gyakorlati feladatokat.<sup>2</sup> Még mindig a próbálgatások stádiumában vagyunk: a segédkönyvek, a tankönyvek legtöbbször szószerint ugyanazon anyagot hozzák, anélkül, hogy új elemeikkel az igazán exakt-gondolkodás fejlődési fokozatait követnék. A grafikai módszer izolált köröket teremtett, ahelyett, hogy a középiskolai anyag feldolgozásának sajátlagossága szerint a függvényfogalom érvényesítésével uniformizált volna. Ennek a nehézkes előbbrejutásnak több oka van, ez alkalommal különösen kettőt emelünk ki. Elsősorban említendő, hogy a grafikai módszereknek igen sokféle az alkalmazása, mind tartalmilag tárgyi körök szerint, mind formailag a feldolgozás foka szerint. Az iskolában külön-külön, de az egyes fokozatokon belül is többféle célt szolgálhatunk ezekkel az eljárásokkal; az alkalmazott matematika tudományos irodalmában is csak újabban rendszeresítik a grafikai eljárások sokféle ágazó

<sup>1</sup> L. pl. *Smith Goldziher*: Bibliography of the teaching of Mathematics (Washington 1912) XIII. fejezet; továbbá a Magyar Pädagogia XVII. és XVIII. (1908/9) évfolyamában adott összeállításainkat.

<sup>2</sup> L. erről: A matematika tanításának fokozatai c. dolgozatunkat, Magyar Pädagogia XIX. [1910]; német átdolgozásban Pädagogisches Archiv LII. [1910].

fejzeiteit. Végleges kialakulásról, megállapodottságról tehát ilyen aránylag rövid időn belül még nem lehet szó; mindenekelőtt gondoskodni kellene a szükséges módszertani alapról. E munkában elsősorban matematikai és nem általános didaktikai szempontok vezessenek; szem előtt tartva, hogy a grafikai feldolgozás ne hirtelenül, átmenet nélkül és a rendes menettől szétszakadva lépjen fel. Másik akadályozó mozzanatot abban látunk, hogy tanáraink nem ismervén a grafikai módszereknek tényleges gyakorlati jelentőségét, alkalmazott matematikai tudományos kapcsolatait, nem válogathatnak szabadon a tankönyvek iskolaszerű és igazában nem gyakorlati anyagában. A grafikai módszerek terén is jóval többet kell a tanárnak tudnia, mint amennyit osztálya elé visz: így tisztában kell lennie az alkalmazott matematika főbb problémáival, a különféle (numerikus, mechanikus, grafikus) számolási eljárásokkal, azok technikájának titkaival, a műszaki életben és a természettudományokban mai nap legfontosabb, grafikai úton megoldható nehány feladattal.

A következőkben e két szempontot követve áttekintünk a grafikai módszerek újabb irodalmán; ezzel mintegy utat jelölve az említett nehézségek leküzdésének érdekében.

2. Az első pontot illetőleg abból kell kiindulnunk, hogy a grafikai módszerek középiskolai bevezetésének tulajdonképeni főcélja, hogy a függvénytan elemeinek tárgyalását empirikus, intuitív módon előkészítse és az iskolai fokhoz mért alapvetését lehetővé tegye. Az iskolai matematikai tanítás jellemző vonása, hogy mindvégig szoros kapcsolatot keres a konkrétumok birodalmával még akkor is, midőn a jól feldolgozott konkrét körökből kiemelkedve az elvonások terére lép. Ennek főoka, hogy a középiskolában nem állanak rendelkezésre az exakt alapvetéshez szükséges precíz segédeszközök. A szemléletes, vagyis approximativ megismerés módszereinek tehát a középiskolai matematikai tanításban önálló helyet kell biztosítani, még akkor is, midőn az infinitezimálszámítás elemeiről van szó. A függvényteni gondolkodást mindig előzze meg a «funktionales Anschauen», mint Höfler mondja.

Volkmann, az ismerettannal foglalkozó königsbergi fizikus, az 1912. szünideji tanfolyamon tartott előadásaiiban\* így szól: «so scheint die Frage, wie vermeidet man den Intellektualismus, die grosse Frage des Schulunterrichts zu sein». Intellektuálisnak nevezhető minden olyan formális fejtegetés, mely az illető tárgy lényegében nem rejlik és vagy nem alkalmazkodik a tanuló értelmi fokához, vagy idővel mechanikus sablonná lesz és így csak terhelő hatással

\* Fragen des physikalischen Schulunterrichts (Leipzig, Teubner, 1913).

van. Az ilyen formális alapvetés a megértést csak látszólag szolgálja és a pedagógiai logicismus<sup>1</sup> (Katz) veszélyeit rejti magában. Volkmann ezen, felette általánosan megfogalmazott, rideg álláspontját csak megfelelő átalakítással fogadhatjuk el.<sup>1</sup> Az elvont elméleti alapvetéssel és a formális asszociációk mechanikus gyakoroltatásával igen óvatosan és takarékosan kell az iskolában elbánnunk, nem függetleníthetjük ezeket szubjektív mozzanatoktól. Minden fokozaton sajátlagos célokat szolgálva a deduktív eljárásnak is általános fejlődési mozzanatokot kell követnie, hogy a tanulóban pszichológiai szükségletté váljék. A szemléltető elem okvetlenül szükséges az iskolában, szemlélet nélküli alapvetés nem való e fokra (Pasch). A matematikai diszpozícióval bíró tanuló szempontjából a dedukciók önálló vezetésében és a mechanikus asszociációk külön szemlélet nélküli szabad kapcsolásában rejlik tárgyunknak logikailag nevelő hatása; de nem így a tanítás kezdő fokán és az átlagos képességű tanulónál. A tömegtanításnál a logikai nevelés az individuumtól függő célokat nem követhet, hanem arra — a minden tekintetben fontos — feladatra vállalkozhatik, hogy adott esetben önállóan és szabadon megtalálhassa a tanuló azokat a szemléltető elemeket, melyek célhoz juttatják a deduktív lépések megértésében és összefüggő értelmet adó egésszé való összefűzésében.<sup>2</sup> Ezeknek a külső (szemléletes) asszociációknak helyes fejlődése természetesen reávezet a formális elemek szabadabb értékesítésére is, különösen a középső és a felső fokon. A grafikai módszereknek ebben van a nagyfontosságú nevelőhatásuk, elméleti jelentőségük. Biztosítják és empirikus alapon az iskola szükségletéhez mérik a deduktív munkához szükséges alapvetést, tárgyi mozzanatokkal kapcsolatosan és fejlődésszerűen vezetik a függvényfogalom természetes

<sup>1</sup> E kérdésekről l.

Höfler: Didaktik des mathematischen Unterrichts (Leipzig, Teubner, 1910), egész menetében, de különösen utolsó ismeretani fejezetében.

Katz: Psychologie und mathematischer Unterricht (Abhandl. über den math. Unt. in Deutschland., III. 8. Leipzig, Teubner, 1913), különösen lélektani vonatkozásokban.

Pasch: Grundlagen der Analysis (Leipzig, Teubner 1909) 122—135. o.; érdekesek a legelvontabb fejtegetéseket követő didaktikai megjegyzések, melyek a szemlélet szerzett jogait védik.

<sup>2</sup> A fizikai tanításban sem fedeztetjük fel a szükséges kísérleti berendezéseket, nem végeztetünk a tudományos kutatás szempontjából olyan nagyfontosságú «gondolati kísérleteket» (Gedankenexperiment: Mach). De a tárgy értelmes felfogása érdekében be kell mutatni a szemléltető kísérleteket és a felső fokon el is kell végeztetni a legfontosabb méréseket és ezekből az önálló következtetéseket.

fellépését és intuitív kialakulását. A grafikai munka különösen az alsó és középső fokon bír nagyfokú didaktikai jelentőséggel, de tudományos tekintetben a felső fokon is fontos célokat szolgál. Minden exakt-tárgy és ennek minden fejezete tanításánál követjük az exakt-gondolkodás hármasság tagoltságát: a leírás, (külső-), a rendezés (formális-) és a rendszerezés (tartalmi-asszociációk) kategóriája szerint; e fejlődésszerű felépítésben az iskolai munkánál a grafikai módszernek előkelő szerep jut. Idézzük *Pasch* szavait: «Den Wert des abstrakten Denkens wird der jugendliche Geist um so eher begreifen, je sparsamer dasselbe angewendet wird und je mehr die Anschauung ihr natürliches Recht behält»; «auf der Schule die abstrakte Behandlung der Mathematik möglichst hinausschieben und die Grundlehren empirisch behandeln». Megjegyezzük, hogy *Pasch* a tiszta matematika tudományos képviselője.

A grafikai módszer tehát nemcsak az egyszerű utólagos szemléltetés eszköze, hanem mint nélkülözhetetlen heurisztikus vezető hármasság fokozatban lehetővé teszi a reformmozgalom követeléseinek módszeres valóvá váltását. E gondolatnak részletes elemzésével «Über die Anwendung des graphischen Verfahrens im mathematischen Schulunterricht» c. dolgozatunkban (Unterrichtsblätter für Math. und Naturwiss. XV. [1909]) foglalkoztunk. Az alsó fokon a *grafikai szemléltetés* (funktionales Anschauen) készíti elő a konkrét számsorozatok függvény-tani kezelését, a középső fokon a *grafikai ábrázolás* (szerkesztés) és számolás egyenleti az elvonásig vezető nehéz utat, a felső fokon a *grafikai diskusszió* nyújtja az absztrakt vonatkozásoknak elemi módszerekkel nem tárgyalható, de legalább a szemléletben pontos alapvetését.

Mind a három fokozatban állandóan és az illető fokozathoz mért fejlődésképes minőségben érvényesül a grafikai módszer *tartalmi* jelentősége (mint a matematikai műveltség alakításánál annyira lényeges induktív munka heurisztikus megindítója). A szemléltetés nemcsak a «gyengébbek kedvéért», hanem a tárgy exakt függvény-tani értelmezésének kidomborítása érdekében történik. A dedukciók alaki asszociációból a szemlélet közvetítésével összefüggő, a tanuló felfogásában értelmes és alkalmazható tartalmi elemek válnak. Továbbá mind a három fokon teljes kapcsolat létesül a gyakorlati élet konkrét alkalmazási köreivel és számoló eljárásaival.

Összefoglalóan mondhatjuk, hogy az új gondolatok sikere lényegesen függ a grafikai eljárások helyes felfogásától és alkalmazásától. A bennük rejlő fontos didaktikai és gyakorlati mozzanatok tudományos értéket is nyernek azáltal, hogy az exakt-gondolkodás formáit követve nem térünk el az iskolában a matematikai diszciplínák igazi

tartalmától. A különbség az, hogy a magasabb körökben nem vagyunk didaktikai mozzanatokhoz kötve és szabadon alkotván az elvonásokat, az axiomatikus rendszerek nem szorulnak a szemlélet intuiciós eszközeire.

3. Legnehezebben törnek utat az új gondolatok az *alsófokú* matematikai tanításban. A magyar bizottság hangsúlyozta legtudatosabban, hogy az igazi módszeres felépítésnek már a tanmenet legelőjén kell megindulnia, újabban Angliában valósult meg e törekvés legtökéletesebben. Különösen fontos, hogy a grafikai elemek ne dekorációként, hanem magasabb céloknak szolgálva fokozatosan és a rendes menetet mélyítve szerepeljenek. Az idevonatkozó anyag megválasztásánál a fő szempont, hogy izolált számértékek feldolgozása helyett *összefüggő konkrét körök számsorozatainak* tanulmányozására építsük fel az exakt kutatási mód intuitív elemeit. A sokszor félreértett feladatot talán egy népszerű képpel világíthatjuk meg: valamely betegség folyamán független időpontokban izoláltan észlelt hőmérsékletek ismerete nem vezet rá a betegségnek a láz változásával való tanulmányozására, de az ú. n. lázgörbék nagyban elősegítik e feladatot. (Számos egyéb ilyen népszerű adatot hozhatnánk a gyakorlati meteorológia köréből, melynek legtöbb eljárási módja az alsófok követeléseire kitűnően alkalmazható.) A tankönyvek vagy egyáltalában nem, vagy helyes megalapozás és fejlődés nélkül mutatják be a grafikai eljárások alkalmazását. A középső fokra szánt legtöbb segédkönyv ilyen módon reászorul arra, hogy a legprimitívebb ábrázolási módok megismertetése és gyakoroltatása érdekében a következőkkel, de egymás között is minden összefüggés nélküli példákat adjon az alsófokra tartozó anyagból. A grafikai munkának már az alsófokon módszeresen kell felépülnie, szoros kapcsolatban a tárgyi körök és a formális anyag fejlődésével. A kvalitatív grafikonok ismertetése után a szabálytalan változástól történő kiindulással a tendenciát, majd törvényszerűséget mutató görbék során át jutunk el a legegyszerűbb szabályos görbékhez (egyenes és fordított arányosság), melyeken a grafikai számolást is bemutathatjuk. E fejezetekben tehát a grafikai eljárások magasabb alkalmazása is szerepel már: a rendelkezésre álló eszközöket túlhaladó vagy összetettebb kifejezésű függvénykapcsolatok tanulmányozásával. A példákat a gyakorlati élet szempontjából értékes körökből választjuk, sok számolást igénylő, összefüggő táblázatos munkálatok során. Ezekről a matematikai logika előkelő művelőinek egyike, *Whitehead* hivatalos jelentésében megjegyzi: «would teach more mathematics and more knowledge of modern social forces than all our present methods put together» (Board of Education 1911).

Az alsófokú számtani tanításban a grafikai módszernek elsőrangú *rendszerező* szerep jut. A rendes menetet nemcsak nagy fokban bővíti, gyakorlativá teszi, de mélyíti is (pl. százalékszámítás fejezetében). E kérdések részletes tárgyalását és a II. és III. osztálynak megfelelő tanmenetét a következő dolgozatainkban közöltük:

1. Grafikai módszerek a számtani oktatásban (Tanáregyesületi Közlöny XLI [1908] és Beke-Mikola-féle gyűjtemény).

2. Der Rechenunterricht auf der Unterstufe der höheren Schulen (Zeitschrift für math. und Naturwiss. Unt. XXXIX. [1908]), melyben a számtantanítás többi fejezetének módszertanával is foglalkoztunk.

4. A *középső* fokon nagyban felhasználhatjuk az alsófokon intuitív módon megszerzett függvénytani ismereteket; az új gondolatok megvalósítását a jól előkészített alapon kezdettől fogva két irányban indíthatjuk meg: a táblázó és grafikai módszerekkel dolgozó induktív és a formális számításokkal operáló deduktív úton. Az érdeklődés középpontjában a legegyszerűbb függvénykapcsolatok algebrai kifejezése, geometriai vizsgálata; alkalmazása és elemzése van; a vezető szempontot a konkrétumokból kivezető eljárások helyes alapvetése jelöli meg. E nehéz munkában a grafikai módszernek igen fontos szerep jut. Mindjárt az algebrai tanítás elején lépnek be a legnehezebb elvonalások (pl. a relatív számfogalom és a vele való műveleteknek a permanencia elven alapuló megállapítása) és így gondoskodnunk kell arról, hogy az elvonásig vezető út a tanulók értelmi fokához alkalmazkodjék, hogy az elemi módszerekkel nem követhető fejtegetéseket legalább a szemléletben pontos elemekkel helyettesíthessük. Röviden: a grafikai módszer elméleti célja, hogy a konkrétumok és az elvonalások közötti, a középiskola szempontjából helyes *középutat* megjelölje. A módszer nagyfokú heurisztikus és gyakorlati jellege mellett érvényesül a benne rejlő analitikus elem, úgy amint azt *Comte* fogalmazta meg legelőször. (Cours de Philosophie Positive I., XII<sup>e</sup> leçon.) Az algebrai kifejezések függvénytani vizsgálatának grafikai elemzése továbbá a precíz módszerek mellett önálló helyet biztosít a gyakorlati matematika approximációs módszereinek is.

A grafikai módszer tehát a középső fokon a függvénytani elemek konkrét alapon történő továbbfejlesztését, az absztrakt vizsgálatok megindítását és az algebrai kifejezések uniformizáló tárgyalását szolgálja és így a formális részt tudományos tekintetben nemcsak kiegészíti, de mélyíti is. De hangsúlyozandó, hogy mindvégig nem célja, hanem csak eszköze a tanításnak, mely nem az analitikai geometria, hanem az algebra elemeinek tárgyalását óhajtja nyújtani. Ebben az irányban legtöbbet nyújt a *Lesser-féle*: Graphische Darstellungen im Mathematikunterricht der höheren Schulen (Leipzig,

Freytag 1908.) c. munka, melyet a Tanáregyesületi Közlöny XLII. évf. [1908] részletesen ismertettünk. E munka bemutatja, hogyan vezet célhoz a középiskolában a grafikai módszer görbék vizsgálatánál, algebrai átalakítások és diszkussziók szemléletes tárgyalásánál. Minden egyes formális lépésnek igazi értelmét domborítja ki. A gyakorlati alkalmazások terén legjobban tájékoztat a következő munka:

*Weill*: Sammlung graphischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen (Gebweiler, Boltze 1908), melyet a Tanáregy. Közlöny XLIII [1909] évfolyamában mutattunk be és melyhez külön megjelent grafikai füzetek is tartoznak. Az algebrai egyenletek körében való grafikai munkáról legjobban tájékoztat:

*Schultze*: Graphic Algebra (New-York, Macmillan, 1908), melyről a Tanáregy. Közl. XLIV. [1910] évfolyamában számoltunk be. A középiskola szempontjából sok idevonatkozó anyag található a következő régebbi munkában:

*Reuschle*: Graphisch-mechanische Methode zur Aufösung der numerischen Gleichungen (Stuttgart, Metzler, 1884).

Végül említjük:

*Phil'pps Beebe*: Graphic Algebra for Colleges (New-York, Am. Book Comp. 1904) c. összefoglaló munkát.

Az itt felmerülő kérdésekkel a dolgozatok, programmértekezések\* egész sorozata foglalkozik (l. a már említett bibliográfia XIII. fejezetét). Külföldön, előbb Angliában, majd újabban Németországban az egyes kérdések iskolai tárgyalását akként óhajtják elősegíteni, hogy segédkönyvek alakjában nyújtják a szükséges ismereteket. A tanárra vár azután az a munka, hogy ezeket az elemeket a tanmenet szerves részeivé tegye. Az újabb német munkák közül említjük:

*Koch-Chambré*: Graphische Algebra (Stuttgart, Grub, 1913), mely egyuttal grafikai munkák elvégzésére is be van rendezve.

*Wittmann*: Funktionen und graphische Darstellungen für den neueren Arithmetikunterricht (Leipzig, Göschen, 1912); tanítóképzőknek, 1. Tan. Közl. XLVII. [1913].

*Druzes*: Ausführlicher Lehrgang der Arithmetik und Algebra II. kötete (Cöln, Du Mont-Schauberg, 1913), mely a grafikai számolás és a nomográfia elemeit is adja.

A segédkönyvek már régebb óta — még a mozgalom előtt is

\* Ezek között legújabbak: *Flechsenshaar*: Graphische Methoden im algebraischen Unterricht. (Lessing Gymnasium, Frankfurt a. M. 1913.) és *Wolff*: Die Verwendung der graphischen Darstellung bei dem Unterricht in der Algebra (Realgymnasium, Ohligs, 1913.)

különösen a grafostatikával kapcsolatosan — jelennek meg ; a Magyar Pädagógiában 1908/9-ben közzétett összeállításainkban több angol jó segédkönyv címét adtuk meg (*Baker, Carter, Gibson, Jamieson, Light-foot, Morgan, Newson, Nipher, Wormell, stb.*). Legújabbán is egész sora jelent meg az ilyen angol és amerikai segéd munkáknak.\*

E helyen emlékezhetünk meg azokról az angol munkákról, melyek «Practical Mathematics» címen az alkalmazott feladatok egész körét felölelik és melyek legkiválóbb képviselőit a Magyar Pädagogia XVII. évf. [1908] 8. számában ismertettük. Ezek sorozatát adtuk továbbá a Magyar Pädagogiában megjelent összeállításainkban is ; újabbán is több hasonló munka jelent meg.

Az újabb algebrai tankönyvek is sorra feldolgozzák a grafikai elemeket, e téren kisebbek a nehézségek, mint az alsófokú oktatás terén. A *König-Beke*-féle Algebra volt e művek sorában a legelső, különösen a másodfokú függvény tárgyalásával. A sok kiváló német, francia és angol tankönyv sorozatából reautalunk a *Behrendsen-Götting*, (Leipzig, Teubner), a *Lesser-Schwab* (Leipzig, Freytag), a *Borel-Stäckel* (francia kiadás : Paris, Colin ; német kiadás : Leipzig, Teubner), a *Baker-Bourne* (London, Bell and Sons)-féle munkákra. De már a feladatgyűjtemények is sokat nyújtanak, legtöbb anyagot talán a Középiskolai Matematikai Lapok utolsó évfolyamaiban találhatunk. Összefüggő példatárak közül említjük elsősorban a *Schülke*-félét (Leipzig, Teubner, I. Tanáregy. Közlöny XV. [1907]), azután *Druxes-Heis* (Cöln., Du Mont-Schauberg) és legújabbán *Bardey-Lietzmann* (Leipzig, Teubner) példatárait. Az utolsónak említett munka nagyszámú és sokoldalú, kiváló példát gyűjt össze a grafikai módszerek köréből.

Végül összeállítjuk (teljességre nem számítva) azokat a legfontosabb problémákat, melyek kidolgozásánál a grafikai módszernek a fentiekben vázolt szerepe van : az arithmetikai és az algebrai műveletek alapvetése (I. Zschr. für math. und naturwiss. Unt. XLI. [1910]), a számfogalom fokozatos felépítése, gyakorlati grafikai számolási eljárások ismertetése, algebrai kifejezések tárgyalása, elsőfokú egyenlet és egyenletrendszer megoldása, másodfokú egyenlet és má-

\* Ezek sorából említjük például a következőket :

*Auerbach* : Elementary course in Graphic Mathematics (Boston, Allyn, 1910).

*Hamilton and Kette* : Graphs and imaginaries (London, 1904).

*Ponzer* : Graphs for reference (Stenford, University, 1910).

*Sanders* : Elementary graphs (algebra, arithmetic ; London, Collins, 1911).



sodfokú függvény tárgyalása (l. Középisk. Math. Lapok XVII. [1909] és Unterrichtsblätter XVII. [1911]), magasabb fokú algebrai egyenletek és transcendens egyenletek megoldása, a határozatlan egyenlet tárgyalása, a számtani és mértani sor tárgyalása (l. Középisk. Math. Lapok XVI. [1908] és XVII. [1909]), gyakorlati geometriai és trigonometriai feladatok millimeterpapíron való szerkesztése, a trigonometria függvénytani alapvetése, a logaritmus, egyenletek és egyenletrendszer megoldhatóságának diszkussziója, a feldolgozott tárgyi körök gyakorlati értékesítése.

5. A *felső fokon*, a rendszerező áttekintés fokán, a grafikai elem az infinitezimálszámításnak geometriai módszerekkel történő feldolgozásánál érvényesül és arra való, hogy a magasabb alkalmazásoknak alapvetését nyújtsa. Az elvonások szabad, önálló alkotása részben túlhaladja a középiskola körét; az a kevés, amit e téren nyújthatunk, ép a grafikai módszer útján nyeri mélyebb megalapozását és különösen az *alkalmazás* lehetőségét. A módszer azonban nem válik bizonyító eljárássá; a deduktív elemeket nem pótolhatja, hanem a tanuló értelmi fokához közelebb hozza és szemléletében helyesen értelmezi. Újabb időben igen nagy számmal jelentek meg — magyar nyelven is — a differenciál- és integrálszámításnak középiskolai tárgyalását előkészítő dolgozatok (l. bibliografiánk XI. és XV. fejezeteit); a rendszeres tanmenetet adó segédkönyvek azonban nem követik mindig a jelzett módszertani gondolatot.\* Így legtöbbször pontatlan kifejezésű kivonatai az egyetem elsőéves kurzusnak és alig alkalmazkodnak a középiskola szükség-

\* Igen ajánlható a tanár szempontjából, hogy megismerkedjék a nem kizárólag az egyetemi matematikai kurzusnak szánt tankönyvekkel. Ilyenek például:

*Beke*: Bevezetés a diff.- és int.-számításba (Budapest, Franklin, 1908).

*Burkhardt*: Vorlesungen über die Elemente der Diff.- und Int.-Rechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen (Leipzig, Teubner 1907.)

*Kohlrausch*: Einführung in die Diff.- und Int.-Rechnung nebst Differentialgleichungen (Berlin, Springer 1907).

*Laisant*: L'enseignement du calcul (Paris, Hachette 1910).

*Love*: Elements of the diff. and int. calculus (Cambridge, University Press, 1909).

*Mercers*: The Calculus for beginners (New-York, Putnam, 1910).

*Osgood*: A first course in the diff. and int. calculus (New-York, Macmillan, 1908).

Egyéb tankönyvekről l. a Magyar Pädagógiában megjelent összeállításainkat is.

letéhez. A már említett újabb, algebrai tankönyvek közelebb jutnak a helyes úthoz, mivel a függvényfogalomnak empirikus kidomborításával fokozatosan érik el az infinitezimálszámítás területét. A grafikai módszer legalább a szemléletben pontosan elemzi a magasabb fogalomalkotás alapjait és utal arra, hogy mindez még pontos logikai kidolgozásra szorul.

A középiskolai függvénytani tanmenet úgy viszonylik az igazi tudományos tárgyaláshoz, mint a könnyebb deduktív elemekkel bővített szemléletes propædeutikus geometria az axiomatikus alapon felépített tudományos geometriához. Az általános műveltség szempontjából mai nap reászorulunk az infinitezimálszámítás középiskolai tanítására; a helyesen választott szemléletes módszerekkel elérjük, hogy pontos alapvetés híján is a középiskola fokához mért helyes utakon járunk. Értékes megjegyzéseket találunk e kérdésről

*Schimmack*: Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neuen Reformbestrebungen (Zeitschr. für math. und naturwiss. Unt. XXXIX. [1908]) c. értekezésében. A végtelen mértani sor szemléletes úton való tárgyalása szintén jó példát ad a jelzett irányban (Unterrichtsblätter XV. [1909] és Középisk. Math. Lapok XVII. [1909]); 1. továbbá *Schimmack* példáját az infinitezimálszámítás köréből: Unterrichtsblätter XIV. [1908] 2. füzet. A Németországban a felső fokon követett módszerről és az eddigi eredményekről tájékoztat:

*Weinreich*: Mathematische Vorträge und Discussionen auf dem Osterferienkurs Göttingen 1912 (Zschr. für math. und naturwiss. Unt. XLIII. [1912], itt röviden ismertette vannak *Runge* előadásai is az alkalmazott matematika köréből).\* A reformmozgalomnak e téren elért eredményeivel legközelebb foglalkozni fog a nemzetközi bizottság párisi kongresszusa, *Beke* referatuma alapján.

A felsőfokon lényeges, hogy egy nagyobb alkalmazott matematikai körben feldolgozzuk az új eljárásokat, a tényleges alkalmazások tekintetében. E feladat megvalósításánál kitünő szolgálatot tesznek a közelítő matematika numerikus eljárásai mellett a grafikai módszerek. Nem ártana továbbá a rendszerezés fokán a grafikai módszer önálló jelentőségét is tárgyalni, pl. amint ezt a politikai számtan terén *Schröder* tette: Beiträge zur Anwendung des graphischen Verfahrens im math. Unt. c. programmértekezésében (Hamburg, Oberrealschule vor dem Holstentore 1909).

\* L. továbbá:

*Richter*: Ergebnisse beim bisherigen Unterricht in der Diff. und Int.-Rechnung in Gymnasialoberprima (Zschr. für math. und naturwiss. Unt. XLIV. [1913]).

A műszaki életben annyira fontos *nomográfiai* eljárások rövid ismertetése nagy fokban kiegészítené a főrealiskola VIII. osztályának rendszerező anyagát. Néhány fontos gyakorlati példán kellene bemutatni a főbb típusokat. Erre igen célszerű és az összes fontosabb eseteket kimerítő eljárás volna pl. ha a kereskedelmi számtant rendszerező (l. erről Sós dolgozatát, Keresked. Szakoktatás XVIII. [1908]) és a politikai számtanban használatos különböző nomogramokat (l. erről *d'Ocagne Traité de Nomographie*, [Paris, Gauthier-Villars 1899] c. nagy könyvének 306., 314. és 326. o.) mutatnók be, kiegészítve egyszerű alkalmazásokkal az egyenletek tana és a műszaki élet köréből.<sup>1</sup>

A felsőfokon a szokottnál nagyobb súlyt kellene helyezni a gyakorlati matematikára, hiszen ebben a körben az új gondolatok igazi fontosságát kellőképp kidomboríthatjuk és a középiskolai módszerek már sok tekintetben elegendők is e téren. Kitünő útmutatást nyújthatnak e kérdésben azok a gyakorlati matematikai munkák, melyeket már a Magyar Pædagogióban megjelent régebbi összeállításunkban közöltünk (pl. *Perry, Saxcelby, Turner*). Az előforduló számoló munkára vonatkozólag ajánljuk a következőket:

*Höfler*: Physik (Braunschweig, Vieweg, 1904), matematikai függelékét (697—773. o.).

*Neuendorff*: Praktische Mathematik (Leipzig, Teubner, 1911).

Arra is lehetne gondolni, hogy a felsőbb matematika elemeit a középiskolában kizárólag gyakorlati alapon, pl. egy nagyobb természettudományi vagy műszaki körben tanítsuk. Az idevonatkozó nagyszámú kísérletek közül (ezek leginkább angol és amerikai műszaki iskolákból valók) a következőket említjük:

*Nernst-Schoenflies*: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften (München, Oldenbourg).

*Mellor*: Higher Mathematics for students of Chemistry and Physics (New-York, Longmans, 1909).

*Koch*: The Mathematics of applied electricity, a Practical Mathematics. (New-York, Willey & Sons, 1912).

*Cobb*: Elements of Applied Mathematics (New-York, Ginn and Co, 1912).<sup>2</sup>

<sup>1</sup> L. erről: *d'Ocagne*: La nomographie dans l'enseignement (L'Ens. Math. II. [1900]).

<sup>2</sup> E körből való *Perry* híres munkája is: Calculus for engineers (London, Arnold, 1899); német átdolgozásban Leipzig, Teubner, 1902. Ismeretes, hogy *Perry*: Practical Mathematics (London, Wyman, 1907) c. előadásaiiban munkásokat vezetett be a felső mathézis elemeibe (l. Magy. Pæd. XVII. [1908] 494—497. o.).

Összefoglalóan mondhatjuk tehát, hogy az új gondolatoknak a felsőfokon való helyes érvényesítése terén az előmunkálatok megvannak már; de még hosszú évek kísérletezése és igen sok, különböző kiindulású tanmenet tényleges gyakorlati kipróbálása szükséges ahhoz, hogy ebben a kérdésben végleges eredményekről beszélhessünk. Mindenféle kidolgozásnál azonban — a középiskola sajátlagos céljait tekintve — a grafikai módszereknek előkelő helyet kell biztosítani.

6. Végül áttérünk a bevezetésben másodikként említett probléma rövid megvilágítására. Arról van szó, hogy tanáraink miképpen sajátíthatják el azokat a magasabb alkalmazott matematikai ismereteket, melyek a grafikai módszer helyes irányítása érdekében okvetlenül szükségesek. A grafikai módszerek az alkalmazott matematikának egyik főfejezetét alkotják és így tudományos tekintetben közelebb hozzák az iskolai anyagot a gyakorlatilag is értékesíthető matematikai diszciplínákhoz, az iskolai matematikai ismereteket is alkalmazhatókká teszik. Másrészt a geometriai függvénytan elemeinek tanításával határozott utat jelölünk az algebrai kifejezések és az egyenletek tanának részletesebb tárgyalásában, approximativ irányban való továbbfejlesztésében. E megjegyzések teszik szükségessé, hogy a tanárnak az iskolában nyújtható primitív elemek tudományos és gyakorlati kapcsolataival tisztában kell lennie.

A grafikai módszereknek nagy irodalmában mai nap már összefoglaló, rendszeres munkákat is találunk, melyek a magasabb alkalmazások szempontját szolgálják és nemcsak a grafikai számolás első elemeit<sup>1</sup> vagy a keresztülvitel módját és gyakorlati vonatkozásait<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Erre vonatkozó és legtöbbször a grafostatikával kapcsolatos, több esetben már régebb keltezésű kézikönyvek sorozata a *Mehmke-féle Encyklopädia*-cikkekben található. Iskolai programmértekezések is régebb óta foglalkoznak a grafikai számolás elemeivel, pl. *Eggers* (Schaffhausen, Gymn., 1865); *Waldapfel* (Budapest, Gyakorló főgimnázium, 1889.) *Bürklen* (Gmünd, Realgimnázium, 1899). Legrégibb iskolai tankönyvek: *Berkhan*: Die Anwendung der Geometrie auf Arithmetik und Algebra (Halle, Schmidt, 1861) és *Wenck*: Die graphische Arithmetik und ihre Anwendung auf Geometrie (Berlin, Nicolai, 1879).

<sup>2</sup> Ilyen például: *Duncan*: Practical curve tracing (London, Longman's Green and Co. 1910).

*French-Osborn*: Graphs or the graphical representation of algebraic functions (London, 1904).

*Peddle*: The construction of graphical charts (New-York, Mc Graw-Hill 1910).

*Prince*: Graphic Arithmetics and Statics (London, University, 1893)

*Turner*: Graphical methods in Applied Mathematics (London, Macmillan 1909).

ismertetik. Elsősorban az ilyen munkáknak közelebbi tanulmányozását ajánlhatjuk az újabb irányban tanítóknak. De a szükséges tudni-valók csak egyrészt ismerhetik meg e könyvekből, mivel az egyetemi oktatás feladata volna, hogy a különben is kívánatos *gyakorlati matematikai kurzus* során a jelölteket a grafikai módszerek *tényleges* rajztermi alkalmazásában is kiképezze. Utalunk e tekintetben a göttingeni és a jénai egyetemen, továbbá több német műegyetemen évek óta nagy sikerrel végzett ilyen irányú tevékenységre, emlékeztünk az angol szakiskolák matematikai laboratóriumaira vagy az 1913-ban *Whittaker* vezetésével az edinburghi egyetemen létesített gyakorlati matematikai kurzusokra. A tanári szünidei tanfolyamok alkalmával is sok hiányt lehetne ezen téren pótolni.\*

E dolgozatban idézzük a grafikai módszerek tudományos irodalmának mai nap legjobb kézikönyveit és röviden utalunk a legfontosabb problémákra, melyek e kézikönyvek anyagát adják. A felmerülő összes kérdésekről és ezek irodalmáról tájékoztat a *Mathematische Encyclopädie* (Leipzig, Teubner) I. kötetében megjelent következő terjedelmes referatum:

*Mehmke*: Numerisches Rechnen; III. fejezet.

A legjobb kézikönyvek a következők:

*d'Ocagne*: Calcul graphique et Nomographie (Encyclop. scientifique, Paris, Doin 1908).

*Runge*: Graphical methods (New-York, Columbia University Press, 1912).

Az elsőnek említett könyv külön tárgyalja a grafikai matematika fejezeteit és külön nagy részben adja a mai nap annyira fontos nomografiának alapelemeit és legújabb alkalmazásait. *Runge* csak rövid fejezetben tárgyalja a nomografiát, mint a több változós függvényeknek gyakorlati síkábrázolási módját, mely a függvényköták (vonal- vagy pont-köták) bevezetésével számolásra teljesen berendezett diagrammokat nyújt és törvényszerű kapcsolatoknak általános grafikai ábrázolását teszi lehetővé. Ném térhetünk ki e helyen a nomográfia ábrázolási módjainak és rendkívül sokoldalú algebrai, függvénytani, természettudományi és műszaki alkalmazásainak részletes

\* A polgári iskolai tanárok szünidei tanfolyamán már két ízben részletesen szó volt az új irányban való tanításról. Az ilyen kurzusok alkalmával okvetlen szükség volna tényleges gyakorlati matematikai órákra. Továbbá legcélszerűbb volna a tanfolyamot a tanév idejében tartani, midőn lehetséges az új eljárások iskolai alkalmazását a gyakorlóiskolák egyes osztályaiban, igazi tanítás keretében bemutatni. A felmerülő adminisztratív nehézségek könnyen leküzdhetők volnának.

fejtegetésére,<sup>1</sup> csak utalunk arra, hogy ezek nélkül mai nap lezárt gyakorlati matematikai műveltség el nem képzelhető; a tanárjelöltre nézve is igen kívánatos volna e módszerek gyakorlatának és a nomográfia érdekes elméletének megismerése.

A «grafikai számolás» magasabb problémái között mai nap legfontosabbak a következők: arithmetikai műveletek és a komplex számok grafikai elmélete, megfigyelési eredmények grafikai ábrázolása, racionális függvényekkel való grafikai számítások, lineár egyenletrendszerek grafikai elmélete,<sup>2</sup> algebrai és transcendens egyenletek grafikai elmélete, grafikai interpolatio, Fourier-féle sorok grafikai tárgyalása (*Slichter*), grafikai integrálás és grafikai differenciálás, komplex-változós függvények grafikai integrálása (*Killam*), differenciálegyenletek grafikai megoldása, stb. Mindezekről a kérdésekről bő ismeretek meríthetők az említett *d'Ocagne* és *Runge*-féle munkákból.

Ugy gondoljuk, hogy a reformmozgalom mai, mindenfelé érdeklődést keltő szakaszában hasznos munkát végeztünk, hogy egyik alapvető kérdésének részleteit és irodalmát e dolgozat keretében bemutatattuk.

GOLDZSIHER KÁROLY.

<sup>1</sup> Rövidebb tájékoztatást nyújtanak:

*Bartus*: Több változós egyenletek nomográfiai ábrázolása (Vízügyi Közlemények XXVIII. 1910).

*Schilling*: Über die Nomographie von M. d'Ocagne (Leipzig, Teubner, 1900).

*Mandl*: Graphische Darstellung von mathematischen Formeln (Wien, Seidel, 1902).

Politikai számtani alkalmazásokról l. a Zeitschr. für Math. und Physik LIX (1911). évf. megjelent dolgozatunk 3. fejezetét és a következő munkát:

*Poussin*: Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurance (Bull. des Actuaires français, No. 58. 1904; I. fejezetében a grafikai számolás főbb elveit is egybeállítja).

<sup>2</sup> L. erről dolgozatunkat: Magy. Mérnök- és Építész-Egylet Heti Közl. 1911., és Zschr. für Math. und Physik LXI. [1912].