A GEOMETRIAI TANÍTÁS ÚJABB SZEMPONTJAIRÓL.

I.

Mostanában sok szó esik a mathematikai tanítás reformálásáról; mi szűkebb körre szorítjuk mondanivalónkat és csak a geometria tanításában érvényesíthető újabb szempontokról kívánunk szólni.

Mindenekelőtt világosan kell látnunk, hogy mi a geometria. Hogy minden félreértést kizárjunk, mindjárt hozzátesszük, hogy itt nem valami többé-kevésbbé önkényes definiciót keresünk, hanem inkább először külső jelekkel való leírását annak, amit geometriának szokás nevezni, hogy azután megállapíthassuk, mik az így meghatározott fogalomnak főjellemvonásai. Külső jelekből ítélve, a geometria egyszerűen a testek alakjára vonatkozó tételsorozat. De e tételsorozatban rend van; a tételek összefüggnek egymással és mi legalább is oly fontosnak ítéljük az összefüggésnek, mint maguknak a tételeknek az ismeretét. Ebből származik, hogy a geometriában bizonyításokat kívánunk. Bebizonyítani valamely tételt, annyit jelent, mint kimutatni, hogy e tétel más, meglevő, elfogadott tételek folyománya vagy más szóval: világossá tenni, hogy e tétel helyessége mely más tételek helyességéhez van kötve. Innen van az is, hogy különös fontosságot tulajdonítunk a megfordítható tételeknek. Ezt érdemes pontosabban megmagyaráznunk. Minden tétel annyit mond, hogy bizonyos A feltevésekből (más, elfogadott tételek közreműködésével) valamely B állítás következik. A tétel megfordítható, ha feltevésként elfogadva B-t, ebből viszont az A állítás helyessége következik. Megfordítható például a következő tétel: ha valamely háromszögben két szög egyenlő, akkor e szögekkel szemben fekvő oldalak is egyenlők; ellenben nem fordítható meg a következő: ha két parallelogramma alapja és magassága megegyezik, akkor területük egyenlő. A meg nem fordítható tételeket igyekszünk lehetőleg mindig megfordíthatókká tenni. Így az utóbbi is megfordítható, ha a következő módon fogalmazzuk: ha két parallelogrammában az alap és magasság mértékszámainak szorzata megegyezik, a két parallelogramma területe egyenlő. Euklides híres postulatuma sem állít egyebet, minthogy ez a tétel: «ha két egyenest egy harmadikkal metszve, két egyenlő megfelelő szöget kapunk, akkor a két egyenes sehol sem metszi egymást» — megfordítható.

A megfordítható tételek a geometriai összefüggések tökéletesebb ismeretét szolgáltatják, mint a meg nem fordíthatók. Oly sokra becsüljük az összefüggések ismeretét, hogy néha olyan tételt is bizonyítunk, amelynek igaz voltáról amúgy is meg vagyunk győződve; ilyenkor t. i. a tétel igaz voltánál is jobban érdekel bennünket az a kapcsolat, mely ezt a tételt más tételekhez fűzi.

Azt mondtuk, hogy a geometria a testek alakjára vonatkozó tételsorozat. A testek alakjára vonatkozó megismerésünk — mint minden más megismerésünk — csak összehasonlíásból ered. Ha testek alakjait akarjuk összehasonlítani, akkor a testeket mozgatnunk kell, hogy egymás helyébe vigyük őket. Vagy ha a mozgatást nem is végezzük el mindig valósággal, akkor legalább elképzeljük; Mach szavaival élve, tehát gondolatbeli kisérletet végzünk. Hogy ez mennyire így van, gondoljunk csak a legegyszerűbb mérésekre. Ha valaki azt mondja, hogy két hosszúság egyenlő, ezen azt értjük, hogy a két hosszúság két testen ki lévén jelölve, e testek úgy helyezhetők egymásmellé, hogy a kérdéses hosszúságok végpontjai összeessenek. Két érczobor alakjának megegyezése attól függ, hogy a két szobor belehelyezhető-e ugyanazon negativ minta belsejébe oly módon, hogy ezt teljesen betöltsék. A geometria egyik legalapvetőbb fogalma az idomok egybevágóságáról azon alapszik, hogy két idomról el tudjuk dönteni, vajjon teljesen egymásra helyezhetők-e vagy nem. Tehát valahányszor a geometriában egybevágósággal van dolgunk, lényegében mindig mozgatás útján való összehasonlítással élünk. Ezért legjobb, ha lehet, a bizonyításban közvetlenül szerepeltetni a mozgatást. Igy például azt a tételt, hogy:

ha valamely ABC háromszögben két oldal és pedig AB és AC egyenlő, akkor az oldalakkal szemközt fekvő C és B szögek is egyenlők,

legegyszerűbb úgy bebizonyítani, hogy megforgatjuk a háromszöget az A szög felezőegyenese körül és megmutatjuk, hogy a háromszög új helyzete födi a régit.

Az előbbiekben egy hallgatag feltevés rejlik; t. i. az, hogy a mozgatással szilárd testek alakjait hasonlítjuk össze. Ezt külön ki kell jelentenünk, ámbár bizonyára senkinek sem jut eszébe tésztából vagy vajból mérőeszközt készíteni. De mit is nevezünk szilárd testnek? Itt nem mondhatjuk, hogy azt, amely alakját nem változtatja, mert hogy egy test alakját nem változtatja, azt csak olyan módon dönthetjük el, hogy e testet állandóan oly más testekkel hasonlítjuk össze, *amelyekről feltesszük,* hogy alakjuk nem változik. És csakugyan, ha például a hőmérsékletváltozással minden test egyenlő arányban terjedne ki, semmi módunk sem volna e kiterjedés észrevételére (mert minden mérőeszközünk épp oly arányban terjedne ki, mint akármelyik megfigyelt test), sőt nem is volna semmi értelme, ha ily körülmények közt a testek hőokozta kitágulásáról beszélnénk.

Kénytelenek vagyunk tehát beérni azzal a megállapítással, hogy a megfigyelésünk alá eső testek közül némelyek jóval egyszerűbb tulajdonságúak, mint mások. Ezeket és azon testeket, amelyek ezekre vonatkozólag állandó alakúaknak mutatkoznak, szilárd testeknek nevezzük. Annyira megbarátkoztunk a szilárd testek tulajdonságaival, hogy rájuk vonatkozó ismereteink tapasztalati jellegéről sokszor el is feledkezünk. E tapasztalatok túlságos egyszerűsége az oka annak, hogy nem vesszük észre őket a geometria alapvetésében. De ha vigyázunk, hogy szem elől ne tévesszük őket, akkor belátjuk, hogy *geometriánkban a szilárd testek mozgásának tulajdonságai tükröződnek.*[1]

Már most, hogy geometriai megismerésünkben rendszer legyen, a szilárd testeken tett tapasztalatainkat összevetjük és kiválasztunk közülük néhányat, amelyek együttvéve magukban foglalják a többit. Ezek a tapasztalatok nyilván a szilárd testek igen általános tulajdonságaira vonatkoznak, amelyeket mi is általánosan, tehát abstraktan fogalmazunk; ezeket nevezzük alaptételeknek vagy axiomáknak és köréjük csoportosítjuk, belőlük kifejtve, a geometria többi tételét. Különösen ki kell emelnünk, hogy tehát az axiomák megválasztása rajtunk fordul meg; ami annyit jelent, hogy bizonyos axiomák helyett vehetünk másokat, amelyek amazokat mindenütt helyettesíthetik és amelyekből amazok le is származtathatók.

Az axiomák megválasztásához négy követelést fűzünk: hogy lehetőleg igen egyszerű és nagyon sokszor tapasztalt tényeket fejezzenek ki, hogy elegendők legyenek az egész geometria felépítésére, hogy függetlenek legyenek egymástól és hogy számuk mennél kisebb legyen. A harmadik követelést talán jobban meg kell világítanunk. Az axiomák függetlenségén azt értjük, hogy egyik axioma a másikat sem magában nem foglalhatja (részben vagy egészben), sem ellenmondást nem tartalmazhat a másikkal szemben. A négy követelés jogos és célszerű volta minden kétségen felül áll és külön vizsgálat tárgya, hogy a geometriának Euklidestől származó rendszere e követeléseknek csakugyan jól megfelel-e. Nem feladatunk, hogy ezeket a vizsgálatokat, különösen, amelyek az axiomák függetlenségére és teljes felsorolására[2] vonatkoznak, e helyen ismertessük. Célunk mindössze az volt, hogy a következők kedvéért a geometria alapjait megvilágítsuk.

[1] *H. Poincaré, La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion; magyarul: *Tudomány és föltevés* cím alatt a Természettudományi Társulat kiadásában.

[2] *D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner.

II.

Középiskoláinkban a geometria rendszerének tanítását az ötödik osztályban kezdik el, amikor a növendékek négy éven át már megszerezték az alapvető geometriai tények ismeretét; tehát ezen a fokon a geometriát mint deduktiv tudományt kell tanítanunk. Ez teszi főleg becsessé; de felállítsuk-e az axiomákkal szemben tanítás közben is az előbb felsorolt négy követelést és kezdjük-e a geometria tárgyalását, a rendszer deduktiv jellegének megfelelően, mindjárt az axiomák teljes felsorolásával? E kérdésre csak nemmel lehet felelnünk és ki is fogjuk fejteni, hogy miért.

Vegyük szemügyre ugyanis azt a négy követelést. Az elsőnek a tanításban is jogos voltához kétség nem fér, hiszen ez annyit mond, hogy ne válasszunk kiindulópontul olyan geometriai tényt, amellyel mindnyájan nagyon régen, öntudatlanul meg ne barátkoztunk volna. Mindjárt a második követelést azonban nem lehet mereven felállítanunk. Mert hogy minden axiomát önállóan kijelentsünk, hogy okoskodásainkba hallgatagon és észrevétlenül, különösen az egyszerű tételek bizonyításánál egy axioma se csússzon be, ahhoz geometriai tapasztalatainknak rendkívül mély analizise volna szükséges és ez a tárgyalást oly elvonttá tenné, amely teljesen alkalmatlan lenne a geometria rendszerének első tanulásához. Tehát le kell mondanunk arról, hogy minden axiomát (vagy legalább azokat, amelyeket az eddigi vizsgálatok felderítettek) külön kijelentsünk. De le kell mondanunk arról is, hogy a kijelentett axiomák teljesen függetlenek legyenek egymástól. Ellenben axiomának fogadhatunk el sok, igen primitiv tapasztalatokkal igazolt tételt, amelyeket a kijelentett axiomákból csak fáradságosan lehetne levezetni, anélkül, hogy be tudnók láttatni e fáradságos út megtételének érdemes voltát. Ilyen például az a tétel, hogy két pont között legrövidebb összekötő vonal az egyenes.

De ha nem ragaszkodunk mereven a harmadik követeléshez, akkor eleve engedtünk a negyediknek szigorúságából is és végeredményben olyan axiomarendszer helyett, amellyel igazi deduktív tudománynak kezdődnie kell, nyertünk olyant, amelyben nincs minden axioma határozottan kijelentve és a kijelentett axiomák közül is némelyik nem önálló, hanem a többinek folyománya.

Joggal kérdezhetjük, nem rontottuk-e el ezáltal a geometria deduktív jellegét? Való, hogy engedtünk a dedukció szigorúságából, de a tanítás célját nem tévesztettük szem elől. E cél az, hogy megmutassuk a geometria tételeinek vagy, ha úgy tetszik, a geometriai tényeknek egymásba fonódását: miként következik egyik vagy egynéhány tételnek helyességéből egy más tételnek helyessége vagyis miként következtethetünk egy vagy egynéhány felismert geometriai tényből új geometriai tényekre vagy végre röviden: miként lehet új geometriai tényeket előrelátni, amelyeket közvetlen tapasztalatunk, tudatunk számára még el sem árult. Hogy eközben nem vettük észre, hogy már egypár axiomának kijelölt tény között is kapcsolat van, hát olyan nagy dolog ez? Hiszen e kapcsolatokat úgy sem merítjük ki, teljes leírásukra soha nem is gondolt senki, mi csupán azt engedtük meg, hogy némely kapcsolat felkeresésére fordítandó fáradságot megtakarítsuk vagyis hogy ezekkel a kapcsolatokkal ne törődjünk és helyettük inkább másokat vizsgáljunk — mondjuk ki egészen őszintén — olyanokat, amelyek a tanuló előtt érdekesebbek; amint azután előrehaladunk, a dedució szigorúságát lassan úgyis teljessé fokozhatjuk. Az összefüggések megkeresése és felismerése ad a geometriai tanításnak oly fontosságot, amely messze túlmegy a geometriai tények puszta ismeretének fontosságán. Nem vétünk tehát, ha a sokkal szemben feláldozzuk kevés számú összefüggés tanítását és a tárgyalás elején nem soroljuk fel ridegen az axiomákat, amikor középponti szerepük a geometriai tételek halmazában még semmivel sem indokolható.

Azonban ha el is fogadjuk ezt az álláspontot, rendszer nélkül nem juthatunk el a geometriai vonatkozások és összefüggések megismeréséhez. Elvégre valahonnan csak el kell indulnunk és törekednünk kell arra is, hogy soha útvesztőben ne érezzük magunkat. De meg kell fontolnunk, hogy Euklides lesz-e a legjobb vezetőnk vagy pedig, hogy nem indulhatnánk-e ki olyan tételekből, amelyeket nemcsak, hogy a tapasztalat éppen olyan közvetlenül igazol, mint Euklides axiomáit, de amelyekből a geometria egyéb fontos tételeihez sokkal rövidebb úton el lehetne jutni, mint Euklides következtetéssorozataival. Természetes, hogy minden azon fordul meg, mit akarunk legegyszerűbb geometriai tapasztalatnak tekinteni, de e kérdésben nemcsak rokonszenvünk vagy a megszokás dönt, hanem segítségünkre jönnek az ujkor nagy mathematikusainak, különösen Lie-nek vizsgálatai. *A geometria a mozgások csoportjának leírása*, tehát remélhetjük, hogy a geometriának egy, az euklidesinél harmonikusabb rendszere épül fel, ha alapul a legegyszerűbb mozgások tulajdonságait választjuk. Nem arról van szó, hogy végkép elvessük az auklidesi geometria páratlan logikai tökéletességű rendszerét, amely komoly tanulmány számára mindig gyümölcsöt hozó, hanem hogy mellette építsünk egy újat, amelyben az ismert geometriai vonatkozások rendje elménk előtt természetesebbnek tűnik, amely nem egy megmerevedett világnak, hanem az elmozdítható testeknek geometriája.

Ha ennek a geometriának a szellemét választjuk vezetőnek, akkor egy-egy geometriai tételcsoport tanulmányozását valamely egyszerű mozgás tanulmányozásával kell kezdenünk. Valóságos kisérleteket kell végeznünk. Ezen nem azt gondoljuk, hogy például méréssel igazoljuk Pythagoras tételét, hanem hogy azokat az elmozdításokat, amelyeknek az idomokat alávetjük úgy, mintha szilárd testek volnának, először magukon a szilárd testeken kell bemutatnunk és megértetnünk. Például a párhuzamosokra vonatkozó tételek előtt a síknak önmagában való eltolása, a szögmérés és a körívre vonatkozó tételek előtt a forgó mozgás lenne tanulmányozandó, Ekként nemcsak a tételek csoportosulnának természetes módon és soknak bizonyítása válnék intuitivebbé, azaz a térről szerzett tapasztalatainkon és nem fogásokon nyugvóvá, hanem egyúttal az idomok nagy részét is keletkezésük közben és nem készen előállítva ismernénk meg, ami szintén természetesebb útja annak, hogy tulajdonságaikat megállapítsuk.

Az elmondottakból következik, hogy mindenekelőtt ki kell választanunk a felhasználandó egyszerű mozgásokat és meg kell állapítanunk e mozgások leírásának sorrendjét. Ez határozza meg azután a geometria fejezeteit és az egyes fejezetek tartalmát. Világos, hogy ez nagy munka és néhány odavetett tanács semmiesetre sem elegendő, hogy sok fáradság nélkül könnyedén elvégezzük. Mégis megpróbáljuk elképzelni, hogy milyen lehetne a mozgásoknak olyan összeállítása, amilyenről az előbb szóltunk. Igy például: a síkgeometria számára

1° sík eltolása önmagában,

2° sík megforgatása egy benne fekvő tengely körül,

3° sík forgatása egy rá merőleges tengely körül; a térgeometria számára az előbbieken kívül,

4° eltolás egy tetszésszerinti egyenes mentén,

5° forgatás tengely körül;

végül, mint a mozgással analog transformatio:

6° symmetria pontra, egyenesre és síkra vonatkozólag.

Egyébként nem is várhatjuk, hogy ezt az új geometriát valaki egyszerre tökéletes alakban megcsinálja. Ehhez sok ember munkája, sok tanító tapasztalata szükséges. Euklides geometriája is így született és nincs okunk azt hinni, hogy ennél tökéletesebbet az emberek már nem alkothatnak.

III.

Azoknak, akik a geometria tanításába szeretnék bevinni a fentebb vázolt elveket, nemrég segítségükre jött egy igen kiváló mathematikus, Emile Borel párisi egyetemi tanár kis könyvével,* amelyet középiskolai tanulók használatára szánt. E könyvben oly geometria megírására törekedett, amelyben konkrét tapasztalatokra, elmozdulásokra, symmetriára a lehető legtöbbször történik hivatkozás. Hogy mindjárt példát idézzünk belőle, nagyon tanulságos és a szokásostól eltérő a parallelogrammák tárgyalása. Különös súlyt vet a *folytonos* változás figyelemmel kisérésére; a henger, kúp- és gömbnek, mint *forgásfelületek*nek tárgyalása nem várt módon egyszerű és áttekinthető. Szinte megnyugvással látjuk, hogy a térbeli geometria tételei oly módon is megállapíthatók, amint mi e tételeket szükség esetén a magunk számára intuitív úton felállítjuk. A megnyugvás onnan ered, hogy fogásokat látunk eltünni, mert a fogások azok, amelyek nyugtalanítanak bennünket, ha általuk jutunk valamely nevezetes eredményhez. Érezzük, hogy ilyenkor nem a dolgok igazi kapcsolatával ismerkedtünk meg, hanem hogy csak valamely szerencsés körülmény egy feladat megoldásához segített bennünket. Amellett, ha így tanítuek, hamis képet nyújtunk a tudományról; a tudomány éppen azért érdemli meg ezt a nevet, mert módszerrel és nem fogásokkal dolgozik. Ugyanebbe a gondolatkörbe tartozik a határértékekkel való számolás. Eddig is kényszerítve volt rá a geometria ott, ahol nem sikerült fogással kibujnia (például a kör kerületének és területének meghatározásánál). Nos, győzzük le egyszerre a nehézséget, akkor nem kell mindig külön utat találni, hogy elkerüljük. Vezessük be egyenesen és *őszintén*, természetesen jól kiválasztott példákon, a határértékre való átmenet elvét. Vagy jobban mondva, minthogy az algebrában a végtelen geometriai sor tárgyalásakor, a geometriában például a π meghatározásakor ezt az elvet hallgatással úgy sem mellőzhetjük, legalább vegyük is hasznát. Bizonyára többet ér kihasználni *egy* elv termékenységét, mint szaporítani a fogásokat és lesülyeszteni a legáltalánosabb elvet is a fogások serege közé. Amit fentebb a geometriáról általánosságban mondtunk, az csak előnnyé avatja, hogy a határérték nem mint kész eredmény, hanem mint ismert lefolyású változás vagy fejlődés végállapota tűnik elénk. Az egész terület- és térfogatszámítást ebből a szempontból tekinthetjük át. Még ha azt az egyszerű feladatot akarjuk is megoldani, hogy kiszámítsuk a háromszög területét, természetesebb — noha hosszabb — út, a területnek közvetlen, határérték módjára való meghatározása (közbevetőleg megjegyezzük, hogy Borel ezt nem teszi), mint a parallelogramma terü-

* *E. Borel*, *Géométrie*, premier et second cycle, Paris, Armand Colin, 1908.

letéből való levezetése. Ez utóbbit inkább csak utólag, mintegy kuriózumképen kellene megemlíteni. Más esetekben azután, amikor egyszerű fogás már nem áll rendelkezésünkre, nagy hasznát látjuk annak, hogy a határérték elvét, egyszerűbb esetben, teljes világosságba helyeztük. Igy például Borelt követve, hasonló idomok területének vagy hasonló testek térfogatának összehasonlítása, továbbá hasáb, gula, henger, kúp és gömb térfogatának kiszámítása mind egyazon elv alkalmazásával történhetik.

Borel könyve sem ment fogyatkozásoktól. Talán túlsokszor hivatkozik a szemléletre — ámbár ez a geometria elején nem nagy baj: de ami rosszabb, néha vázol bizonyítást, amit nem könnyű kiegészíteni. Sokan nem fognak vele egyetérteni abban, hogy amint a síkgeometria egyszerű tételeit előadta, mindjárt áttér a térgeometriára, kikerülvén az idomok metrikus tulajdonságait és hogy csak azután tárgyalja a geometriának azt a részét, ahol a szám is szerepet játszik. Ebben az az elv vezeti, hogy előbb az idomok alakját kell megismerni, azután kerülhet a mérésre sor. De ismételjük, nem ebben rejlik könyvének érdeme, hanem abban, hogy megkisérelte a tanítás számára olyan rendszerbe foglalni a geometria tételeit, amely harmonikusabb az eddiginél és jobban illeszkedik elménk szokásaihoz is.

Dr. Szűcs Adolf.

NÉMET OLVASMÁNYOK A KÖZÉPISKOLÁBAN.

Menj, s mondd uradnak, hogy magyar vitéznél
Több a becsület mint királyi fény.
Elzúzhat engem ő s hű népemet,
Él a becsület, nincs azon hatalma,
Hogy felrabolja, mint a tartományt:
Addig nem ér egy győző karja sem.

Körner-Szemere, Zrinyi, III. felv.

«Felejtém Körnert és művében a német világi sentimentalismus üres csevegéseit s csak azt érezvén, hogy magyar vagyok, hogy az új Leonidás dicsősége reám is, mint hazafira visszafénylik, épen oly műítélői fejvakargatás és szemöldök-hunyorgatás nélkül csappangatám öszve tenyereimet: mint a galeriának boldog birtokosai.» (Kölcsey F., Körner Zrinyijéről.)

Ahogyan majdnem egy évszáz előtt Kölcseyt megihlette a huszonnégyéves Körner, aki hírvirágból font koszorút tett Zrinyi emlékére, úgy hatott reám, midőn körülbelül harminc év után újra elolvastam