S Z E M L E

A gravitáció

A körmozgás dinamikája

Az égitestek körmozgásának fenntartásához nem szükséges külön erő, legalábbis nem „földi" erő – hirdette Arisztotelész, de még Galilei is azon a véleményen volt, hogy a tehetetlenség elve a körmozgásra érvényes. * *Newton I. törvénye azonban egyenes vonalú egyenletes mozgásra vonatkozik. A körpályán haladó testnek minden pontban más a sebessége (a vektor iránya változik), azaz az ilyen test gyorsul. Gyorsulást pedig csak valamely erő hozhat létre. A körmozgás fenntartásához tehát erőre van szükség. Ezt az elvi megfontolást számtalan gyakorlati tapasztalat is alátámasztotta. A kalapácsvető kezében forgás közben megfeszül a kötél, s az elengedett súly érintőirányban röpül tovább. Ugyancsak érintőirányban pattannak le a szikrák a köszörűkőről. Newton kortársa, a holland Huygens, aki először foglalkozott behatóbban a körmozgás dinamikájával, centripetális (középpont felé mutató) erőnek nevezte ezt a körmozgást fenntartó hatást. Kiszámolta a nagyságát is (kissé megelőzve Newtont). Mivel F = ma, a centripetális erő kiszámításához a gyorsulás értékére van szükségünk.*

Egyenletes a körmozgás, ha egy tömegpont a kör kerületén úgy mozog, hogy egyenlő *dt* időközök alatt egyenlő *di* ívdarabokat fut be. Ekkor

$$di/dt = \text{állandó}.$$

Ez az adott pont kerületi sebessége.

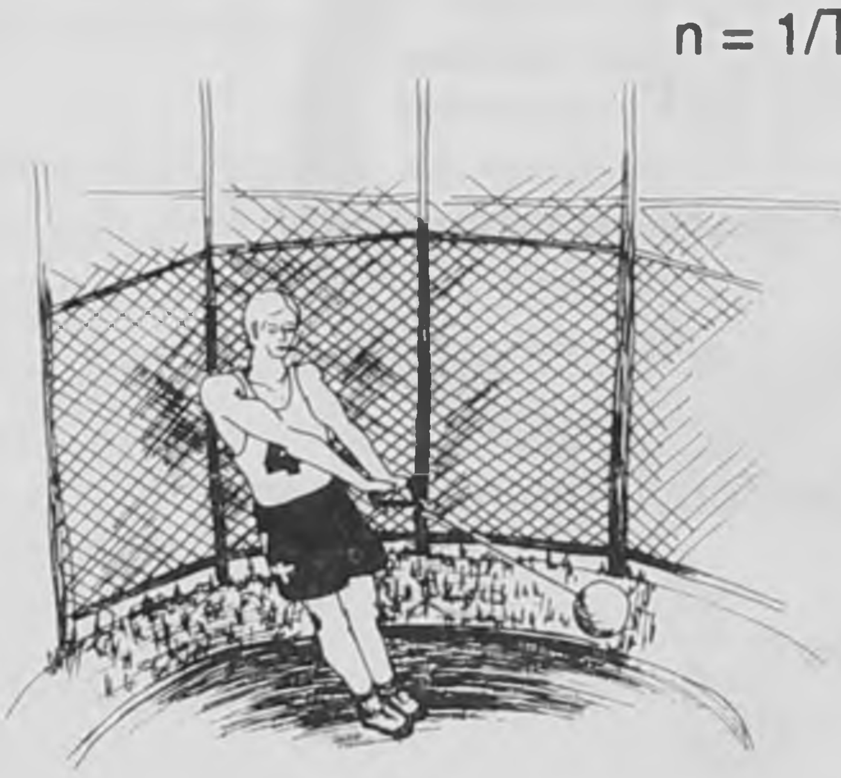
Azt a *T* időt, amely alatt az egyenletes körmozgást végző test a kör kerületét befutja, keringési időnek nevezik:

$$T = 2r\pi$$

$$v = \frac{2r\pi}{T}$$

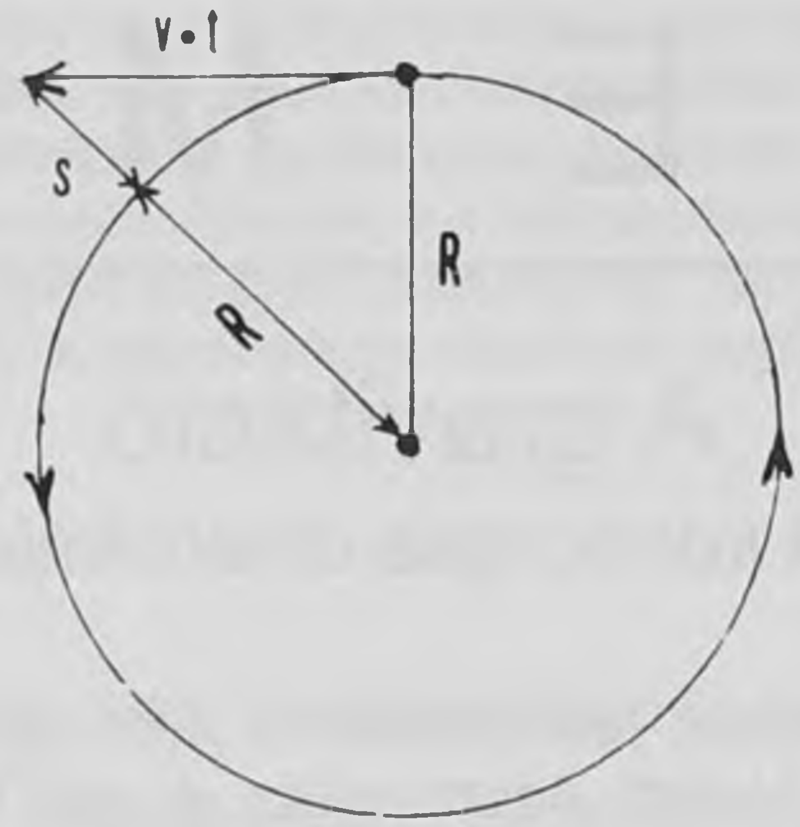
Különösen gépekben gyakran használják az *n* fordulatszámot is. Ez az időegység alatt befutott körök száma, azaz:

$$n = 1/T.$$



1. ábra
A körmozgás fenntartásához erőre van szükség

*Részlet a Tudománytörténet I. című tankönyvből, amelyet a PSzM Projekt támogatásával a Gondolat Kiadó jelentetett meg.



2. ábra
A körmozgás gyorsulása

Példa:

Mekkora a Hold sebessége? Ismert a keringési idő: 27,3 nap = 2,36 • 10^6 s. A Hold a Föld középpontjától körülbelül 60 földátmérőnyire kering, közelítőleg körpályán. Így

$$r = 60{,}3\ R_{Föld} = 3{,}84 \bullet 10^7\ \text{km}.$$

A kerületi sebesség tehát

$$v = 2r\Pi/T = 1{,}02\ \text{km/s}.$$

Huygens és Newton gondolatmenete abból indul ki, hogy összehasonlítják egy körvonalon mozgó test pályáját egy olyanéval, amelyik egyenes vonalú egyenletes mozgással folytatja útját. Ha kiindulópontjuk és sebességük azonos volt, akkor *t* idő múlva helyzetük különbsége megadja a gyorsulás nagyságát és irányát. A kör *r* sugarú, a kerületi sebesség *v*. Az egyenes vonalú egyenletes mozgással haladó pont *t* idő alatt *x* = *vt* távolságra jut a kiindulási ponttól. Ezalatt a körpályán haladó test a *B* pontba ért. Az *s* különbség az az út, amelyet a kör középpontja felé ható centripetális erő hatására tett meg, a keresett gyorsulással. Püthagorasz tétele szerint:

$$R^2 = (vt)^2 = (R + s)^2,$$

$$s^2 + 2Rs = (vt)^2.$$

Minél kisebb időtartamot vizsgálunk, s^2 értéke annál rohamosabban közelít a 0-hoz (csak a sokadik tizedes jegyben jelentkezik), ezért *2Rs*-hez képest „elhanyagolható". (Megjegyzendő, hogy az „elhanyagolás" ebben az esetben nem jelent pontatlanságot, a levezetés tehát nem közelítő, hanem pontos végeredményt ad.)

$$2Rs = (vt)^2$$

$$s = \frac{1}{2}\frac{v^2}{R}t^2$$

Mivel az egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgásnál:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

ezért a körmozgás során a testnek sugárirányú gyorsulása van:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

A centripetális erő pedig

$$F = ma = \frac{mv^2}{r}$$

Megjegyzendő, hogy a gyorsuló rendszerben tatózkodó megfigyelő (pl. a körhintán ülő személy) ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú, kifelé röpítő látszólagos erőt érez. Ezt szokták centrifugális („a középponttól elfutó") erőnek is nevezni.

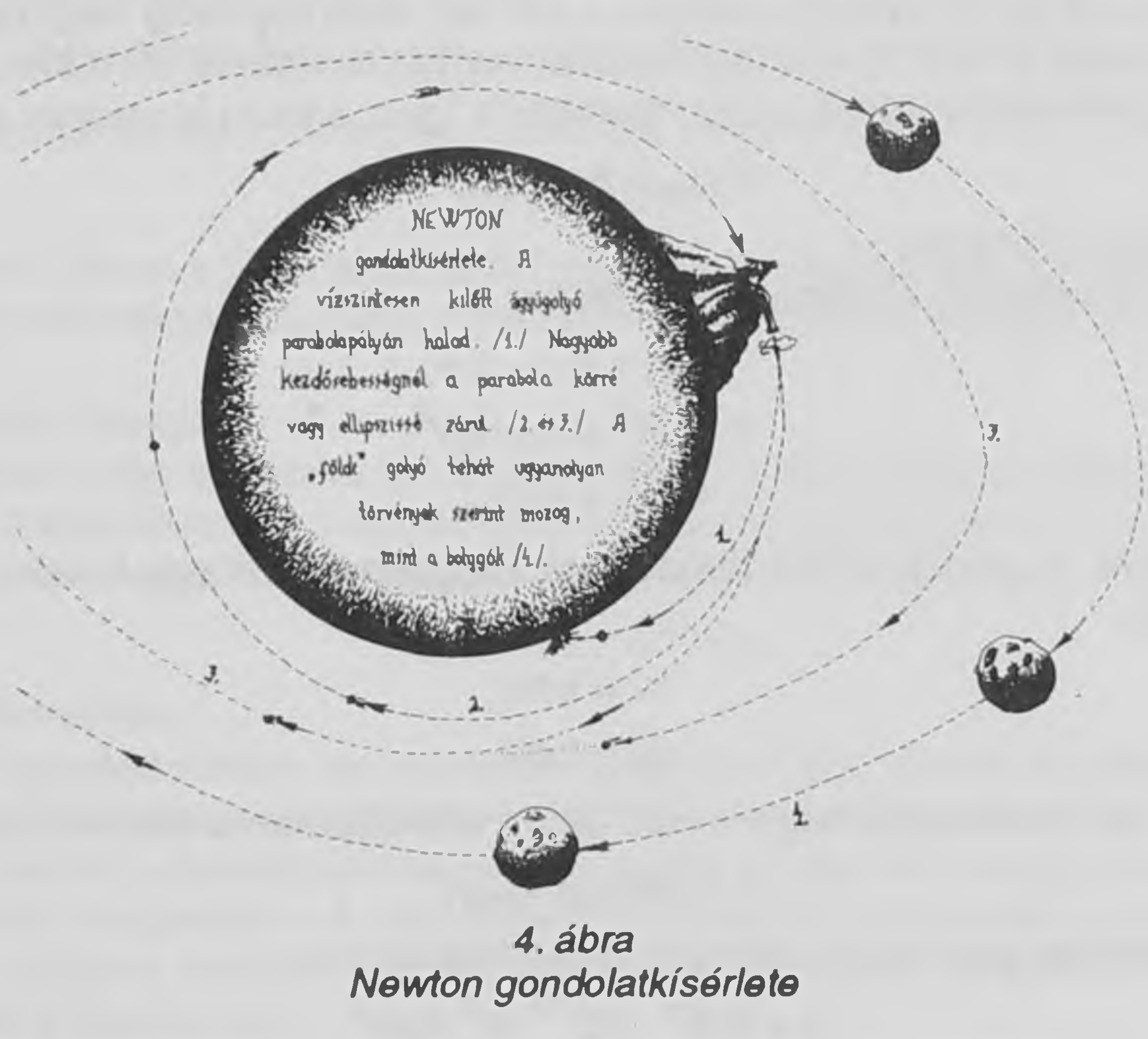
Alma, Hold, ágyúgolyók
(Az égi és földi mozgások összekapcsolása)

A legenda szerint Newton a kertjében üldögélt, nézte a Holdat, és azon gondolkodott, hogy az égitestek miért viselkednek másképpen, mint a földiek. Ekkor a fejére esett egy alma, és ő hirtelen rájött a megoldásra. (A megvilágosodás pillanatát persze sok év munkája, töprengése előzte meg!) Képzeljük el mi is, hogy egy almafa alatt ülünk. Itt van pl. ez az alma. Miért esik lefelé? Miért nem oldalra vagy fölfelé esik? Nyilván vonzza a Föld. Meddig terjedhet ez a vonzás? Vajon megszakad valahol a felhők fölött? Mivel ez elég valószínűtlen, nyugodtan föltehetjük, hogy egészen távoli testekre is hat. A Hold pedig test, egy hatalmas kődarab. Miért nem zuhan akkor a fejünkre? Talán létezik egy különleges erő, egy angyal, aki a magasban tartja?

3. ábra
Newton angyala (Dürer nyomán)

Ez a megoldás csodálatos, de nem ez a baj. A baj az, hogy részleges: ugyanez az angyal miért nem állítja meg soha a lehulló almát? Egy ilyen válasz tehát nem nyugtathatott meg senkit, aki a világ egyetemes rendjében, a természettörvények korlátlan érvényességében hitt. Newton pedig hitt ebben.

Megoldása olyan egyszerű, hogy képtelenségnek tűnik. Az égitestek pontosan úgy viselkednek, mint a földiek: a Hold ugyanúgy zuhan a Föld felé, mint az alma. Állítását gondolatkísérletekkel szemlélteti.



4. ábra
Newton gondolatkísérlete

Képzeljük el (miként Galilei), hogy egy magas hegy csúcsáról ágyúval lövünk vízszintes irányban. Kis sebességek esetén a golyó (közelítőleg) parabolapályán a tengerbe zuhan. Ha növeljük a kezdősebességet, mind távolabb esik le. Ha a légellenállás hatását valahogyan kiküszöböljük, akkor nincs elvi akadálya annak, hogy éppen akkorát lőjünk az ágyúval, hogy a golyó megkerülje, mintegy „körbeesse" a Földet. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a Föld felszíne ugyanannyit „görbül" a test alatt, amenyit az zuhan felé: soha nem éri el tehát a felszínt. Newton bebizonyította, hogy e nagy sebességű testek sebességük és a Földtől való távolságuk függvényében kör- vagy ellipszispályán fognak mozogni, a Kepler-törvényeknek megfelelően. Eltekintve tehát a pályára bocsátás körülményeitől és a testek méreteitől, valójában semmi lényeges különbség nincs a Hold és az ágyúgolyó, az égi és a földi test mozgása között. Akár mesterséges holdakat is pályára állíthatunk! A XX. század technikája, mint tudjuk, megvalósította és hasznosította ezt az ötletet. Ehhez természetesen az szükséges, hogy a testeket körpályára kényszerítő centripetális erőt, azaz a Föld vonzóerejét számszerűen is jellemezni tudjuk. Mivel a Föld vonzóereje okozza a testek súlyát, ezért ezt a fajta speciális centripetális erőt gravitációs erőnek nevezték el.

A gravitációs erő nagysága

Körpályán mozgó testre $F = mv^2/r$ nagyságú centripetális erő hat. (A bolygók pályája valójában enyhén lapult ellipszis, de a különbség első megközelítésben elhanyagolható.) Newton célja az volt, hgoy a vonzóerőt egyedül a távolság függvényeként adja meg. Ha a test *T* idő alatt tesz meg egy teljes kört, akkor

$$v = 2r\Pi/T, \text{ azaz } F = m4\Pi^2 r/T^2,$$

amelyből

$$T^2 = 4\Pi^2 mr/F.$$

E ponton Newton felhasználta Kepler 3. törvényét.

$$T^2/r^3 = c \ (c = \text{állandó})$$

$$T^2 = cr^3 = 4\Pi^2\, mr/F$$

Mivel $4\Pi^2/c$ = állandó, ezt k-val jelölve:

$$F = km/r^2.$$

A gravitációs erő tehát fordítva arányos a két test közti távolság négyzetével. Ha m_H a Hold tömege, akkor a Föld $F_H = k_1 m_H/r^2$ erővel vonzza magához a Holdat. Ám, ha a gravitációs erő egyetemes érvényű, akkor fordítva is igaz: a Hold is vonzza a Földet.

$$F_{Föld} = k_2\, m_{Föld}/r^2,$$

ahol $m_{Föld}$ a Föld tömege.

Ha azonban Newton III. axiómája igaz, akkor

$$F_{Föld} = F_{Hold} = F,$$

$$k_1 m_F/r^2 = k_2 m_H/r^2,$$

$$k_1 m_F = k_2 m_H.$$

Mivel k_1 a Hold, k_2 pedig a Föld tömegének függvénye, ezt egy k arányossági tényezővel jelölhetjük:

$$k_1 = km_H,$$

$$k_2 = km_F.$$

Ebből pedig az következik, hogy a Föld és a Hold egymásra kifejtett vonzóereje:

$$F = km_{Föld} m_{Hold}/r^2.$$

Itt k az egyetemes gravitációs állandó, amelynek értéke:

$$k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg/s^2.$$

Általánosságban: két tetszőleges m_1 és m_2 tömegű test

$$F = km_1m_2/r^2$$

erővel vonzza egymást. Ez az általános tömegvonzás törvénye.

Newton a Hold mozgásával igazolta elméletét. Mivel a Hold körülbelül 60 földsugárnyira kering tőlünk, így, ha a képlet igaz, R^2 = 3600-szor kisebb a gyorsulása, mint bármilyen tárgynak a Föld felszínén. Az elméleti érték tehát

$$a_{Hold} = 9{,}81\ m/s^2 : 3600 = 0{,}002\ 73\ m/s^2.$$

A tapasztalat, körpályát feltételezve, a T = 27,3 napos keringési idő és a földsugár ismeretében: 0,002 72 m/s^2. Az elmélet és a tapasztalat tehát nagyon meggyőzően egyezik.

5. ábra
Eötvös Loránd

A tömegvonzást nem csak csillagászati megfigyelések, hanem földi kísérletek is igazolták. Noha kis tömegű testek között a vonzás is parányi, kellően érzékeny műszerrel mégis kimutatható. Elsőként az angol Henry Cavendish (1731-1810) mérte meg torziós mérlegével a gravitációs állandó értékét.

Ezt sokszorosan fölülmúlta pontosságban Eötvös Loránd berendezése, amelynek nem csupán elméleti, hanem gyakorlati jelentősége is van. Eötvös fölismerte, hogy ha a földfelszín vagy a tengerek alatt a tömegeloszlás nem egyenletes, az a gravitációs erőt is befolyásolja. Az Eötvös-féle műszerrel szinte beláthatunk a Föld belsejébe, amelynek pl. a földrengések előrejelzésébenvagyazásványkincsekkutatásában lehet jelentősége.

Néhány példa a gravitációs törvény alkalmazására:

a. Föld tömege és sűrűsége

A gravitációs álandó ismeretében meghatározható az égitestek, pl. a Föld tömege. A Föld sugara R = 6370 km. Egy felszínén lévő *m* tömegű testnek *G = mg* a súlya, amely a gravitációs vonzásból származik. Ezért

$$mg = kmm_F/R^2, \text{ ahol } m_F \text{ a Föld tömege } (m_F = 6 \cdot 10^{21}\ t).$$

Átlagos sűrűsége pedig a tömeg és a térfogat hányadosa:

$$V = 4R^3\,\Pi/3,$$

így = 5,5 g/cm^3. Mivel a Föld felszínéről begyűjthető kőzetek átlagos sűrűsége csupán 2,5 g/cm^3, ezért szükségszerű, hogy a mélyben egy 5,5-nél jóval nagyobb sűrűségű mag legyen.

b. Az égitestek tömege

Hasonló módon elég egyszerű kiszámolni minden olyan égitest tömegét, amely körül egy vagy több másik kering. A Nap tömegét megtudhatjuk, ha ismerjük pl. a Mars keringési idejét és pályasugarát. A tömegvonzás gyorsítja a bolygót, így:

$$m_N = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg.$$

c. Égitest fölfedezése

A gravitáció természetesen nemcsak két kiragadott test, hanem minden tömeg között hat. Az elmélet „bravúrosan" alkalmazta Leverrier francia csillagász, aki az Uránusz bolygó pályájának ismert „szabálytalanságát" egy addig ismeretlen bolygó zavaró hatásával (perturbációjával) magyarázta. A perturbáció mértékéből kiszámolta az ismeretlen bolygó tömegét és várható helyét. A „jóslat" sikeresnek bizonyult: 1846-ban a megadott helyen fölfedezték a Neptunuszt.

A „távolhatás" problémája

A kötél végére kötött súlyt a kötél anyaga kényszeríti körmozgásra, ha megforgatjuk. El is szakadhat, ha nem elég erős. Önként adódik a kérdés: miféle anyag közvetíti a gravitációs vonzást egyik testtől a másikig? Kiszámolható, hogy hatalmas erőkről van szó: a Föld összes acélsodronya nem volna elég, hogy pályán tartsa a Holdat, ha valami okból megszűnne a gravitáció.

Newton maga főművében nem foglalt állást. Megelégedett azzal hogy levezette és bizonyította a számszerű összefüggéseket. „Hypotheses non fingo" („Hipotéziseket nem gyártok!") – hirdette. Hipotézisen olyan feltevéseket értett, amelyek – meggyőződése szerint – fizikai módszerekkel nem igazolhatók vagy cáfolhatók, így az ezekkel való foglalatoskodás a szaktudomány szempontjából meddő. Csakhogy a problémától filozófiai jelentősége miatt mégsem lehetett eltekinteni.A tudósok egyik csoportja úgy vélte, hogy a gravitáció mindenfajta közvetítés nélkül ébred, egyszerűen: van. Ez a „távolhatás" hipotézise. A tudósok nagyobb része (s levelei tanúsága szerint maga Newton is) azonban inkább valami közvetítő közegre, egyfajta éterre gondolt. Ez az elképzelt anyag hozná létre a kapcsolatot a legtávolabbi testek között is, hiszen erre a filozófiai értelemben vett vákuum, a „Semmi" aligha lenne képes. A probléma ma is vitatott.

Summa

Newton gravitációs elmélete kapcsolta össze az égi és a földi fizikát. Ehhez föl kellett ismerni és számszerűen jellemezni a körmozgás gyorsulását, illetve az azt létrehozó centripetális erőt (Huygens). Newton föltételezte, hogy az étgitestek, éppúgy, mint a földiek, a Föld középpontja felé gyorsulnak. Ezt a centripetális erőt tömegvonzásnak (gravitáció) nevezte. Kepler 3. törvényét felhasználva kimutata, hogy a tömegvonzás egyenesen arányos a testek tömegével, és fordítva arányos a köztük lévő távolság négyzetével. Állítását a csillagászat eredményei (Hold mozgása) és földi mérések (Cavendish, Eötvös) igazolták. Eötvös torziós ingája lehetővé tette a Föld mélyen fekvő, de eltérő sűrűségű rétegeinek föltérképezését. A gravitáció hatásmechanizmusát kétféleképpen próbálták magyarázni: közvetítő közeg (éter) útján vagy anélkül (távolhatás).

Vitakérdések, problémák

1) Giordano Bruno példabeli köve „habozik", hogy az egyik vagy a másik égitest felé essen. Előállítható-e ilyen helyzet a newtoni fizika szerint is?

2) Vajon filozófiai vagy inkább fizikai megfontolások vezették Galileit, amikor tehetetlenségi elvét gömbhéjak felületére tartotta érvényesnek? Miért idegenkedett Giordano Bruno világképétől? Hogyan viszonyul Newton megoldása Giordano Brunóéhoz?

3) Ha a Föld forog: gyorsul. Newton fizikájának ismeretében mit mondhatnánk a skolasztikusoknak a Föld forgásával szemben felhozott érveire? Igaza volt-e Galileinek?

4) Az egyik Galilei-hold, a lo kb. 424 km sugarú pályán kering a Jupiter körül. Keringési ideje 1,77 nap. Mekkora a Jupiter tömege?

5) Egy másik Jupiter-hold, a Callisto keringési ideje 16,7 nap. Milyen messze van a Jupitertől?

6) Jules Verne egyik regényében a feltaláló egy hatalmas rakéta segítségével megkísérli „kiegyenesíteni", azaz a keringés síkjára merőlegessé tenni a Föld forgástengelyét. Milyen következményekkel járna, ha a kísérlet csakugyan sikerülne?

7) Az árapály súrlódása lassan, de folyamatosan fékezi a Föld tengely körüli forgását. A számítások szerint Hipparkhosz kora óta 1/32 másodperccel lett hosszabb a nap. Ha a tendencia így folytatódik: mikor szűnik meg a Föld tengely körüli forgása? Milyen következményekkel járna ez?

8) Azonos-e Newton abszolút tere az atomista vákuummal? Kapcsoltba hozható-e ez a gondolat Arisztotelész és Aquinói Szent Tamás „mozdulatlan mozgatójával"? Mennyi-

ben közelítik meg az abszolút tér jelentését az alábbiak: térkép fokbeosztása, futballpálya, üres hordó, felparcellázott síkság, kottavonalak, Descartes-féle koordináta-rendszer?

9) Newton III. axiómája értelmében ugyanakkora erővel húzza a ló a kocsit, mint a kocsi a lovat. Hogyan lehet, hogy mégis elindulnak? Miért lesz más az eredmény egy tükörsima jégfelületen?

10) A Föld közelítőleg körpályán kering a Nap körül. Mekkora a kerületi sebessége, ha a Nap-Föld távolság 150 millió km, és a Nap tömege $2 \cdot 10^{30}$ kg?

BOTH MÁRIA – CSORBA F. LÁSZLÓ

A világ rendszeréről

I. Arról, hogy az egek folyékonyak. Ezt írja Arkhimédész az Arenariumban, Arisztotelész a De coelo II könyvében, Plutarkhosz a De placitis philos III könyvében, és Numa Pompiliusnál is megtalálható

A filozófusok az ősidőkben azt tartották, hogy az állócsillagok a világ legtávolabbi részében helyezkednek el mozdulatlanul, alattuk a bolygók róják köreiket pályáikon a Nap körül, a Föld hasonlóképpen éves, saját tengelye körül pedig napi forgást végez, s hogy a Nap, az Univerzum gyújtópontja, mindenek középpontjában nyugszik. Így vélekedtek ugyanis a pitagoreusok, majd Philolaosz, számoszi Arisztarkhosz, érett korában Platón, s aki mindannyiuknál korábban élt, Anaximandrosz is. A rómaiak királya, a bölcs Numa Pompilius pedig a kerek világ szimbólumaként, melynek a Nap tüze ég a középpontjában, kör alakú Vesta-templomot emelt, és elrendelete, hogy közepében örökkön égő tüzet tápláljanak. Valószínű továbbá, hogy a régi egyiptomi csillagászok is e felfogást tanították és terjesztették. Mert láthatólag tőlük és a velük szomszédos népektől származott a görögökhöz, ehhez az inkább filológiára, mint filozófiára hajlamos néphez a legősibb és legromlatlanabb filozófia, a Vesta-kultusz pedig ugyancsak az egyiptomiak bölcsességéről tanúskodik, mivel ők szokták korábban a tömeg felfogását meghaladó titkos tanaikat a szent rítusok és hieroglifák álarcába rejteni. Csak később tanították azután a görögök: Anaxagorász, Démokritosz és mások, hogy a Föld áll a Világ középpontjában mozdulatlanul, és hogy a csillagok körülötte nyugati irányban szabad térben keringenek: az egyik gyorsabban, a másik lassabban. A szilárd pályák gondolatát pedig csak Eudoxosz, Kalliposz és Arisztotelész vezette be, midőn a régi filozófia már hanyatlásnak indult, és a görög magyarázatok lassanként túlsúlyra jutottak. Az üstökösök létezése azonban nehezen egyeztethető össze a szilárd pályákkal. Az üstökösöket, amelyeket sokan az égitestek közé számítottak, a csillagászatban felettébb járatos káldeusok olyan bolygócsillagoknak tartották, amelyek rendkívül excentrikus pályájuk alsó pontjára leszállván, keringésenként egyszer, a fordulóban válnak számunkra láthatóvá. A szilárd pályák hipotézise szerint azonban ezeknek szükségképpen a Hold alatti régióban a helyük: amint tehát ezeket az asztronómusok újabb megfigyelései visszahelyezték a Hold fölötti szférákba, a szilárd pályák menten széttörtek és kiűzettek az éterből.

A szabad térben végzett körmozgás elve

Azt azonban nem tudom, hogy a régiek hogyan magyarázták meg, hogy a bilincseiktől ily módon megszabadított és szabad térbe helyezett bolygók miért nem végtelen, egyenes vonalú utat futnak be, miért szabályosan, pályákon keringenek. Úgy vélem azonban,

* Részlet a Both Mária – Csorba F. László válogatta Tudománytörténet I. szöveggyűjteményből (Gondolat, 1993), amely megjelenését a PSzM Projekt tette lehetővé.