Számítógép az oktatásban

Mértani helyek megsejtése számítógép segítségével

KÁSA ZOLTÁN

Sok vita folyik arról, hogy mit és hogyan érdemes számítógéppel oktatni. Ebben az írásban csupán arra szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy milyen érdekes lehetőséget nyújthat a számítógép a mértan tanításának egyik kulcsfontosságú fejezetében.

Köztudomású, hogy a mértani helyekkel kapcsolatos feladatok sok fejtörtést okoznak a tanulóknak. Egy ilyen feladat megoldásához lényeges lépés a mértani hely megsejtése, amit aztán be kell bizonyítani. A gyakorlatban a tanuló megrajzol néhány ábrát a mozgó pont különböző helyzetével, és megpróbálja elképzelni a folyamatos mozgást, majd abból kitalálni a keresett tulajdonságú görbét, amely éppen a mértani hely. Ha ez nem sikerül, a feladat megoldása már a legelején megakad. A számítógép segítségével könnyűszerrel annyi ábrát rajzolunk, amennyit csak akarunk. Ez pedig hozzásegíthet a mértani hely megsejtéséhez. A feladatot azonban ezzel a megsejtéssel és képernyőn való megjelenítéssel nem tekinthetjük megoldottnak. A pontos matematikai bizonyítás, akárcsak az eredmény elemzése, ezután következik. Ezt már a legelején tudatosítanunk kell.

Ha valaki tud programozni, akkor kis erőfeszítéssel minden mértani helyes feladathoz írhat egy-egy programot, amely megjeleníti a számítógép képernyőjén a változó ábrát a megsejthető mértani hellyel. Mivel ezekben a feladatokban nagyon sok közös vonás van, elképzelhető egy olyan program, amely több feladat megoldásában is segít, és olyanok is használhatják, akik nem tudnak programozni. Ilyen programot terveztünk a kolozsvári tudományegyetem matematika karán. A program lényege, hogy egy egyszerű, könnyen megtanulható nyelv segítségével leírjuk a feladatot, megadjuk a mozgó pont helyét (ez a jelenlegi változatban csak szakasz vagy körív lehet), majd tetszőleges számú ábrát rajzoltatunk a géppel. A képernyőn megjelennek a mozgó pont különböző helyzetének megfelelő ábrák, és a pontokból kirajzolódó mértani hely. Anélkül, hogy belemerülnénk a nyelv leírásába, bemutatunk egy feladatleírást. Feladatunk a következő:

Az ABC háromszögben AB = AC, és M változó pont az AB oldalon. Az AC oldalon felvesszük az N pontot úgy, hogy AN = BM. Keressük az MN szakasz felezőpontjának mértani helyét.

POINT A = 250,300	megrajzolja az A (250,300) pontot
POINT B = 100,50	megrajzolja a B (100,50) pontot
POINT C = 400,50	megrajzolja a C (400,50) pontot
TRIANGLE A, B, C	megrajzolja az ABC háromszöget
VAR M LINE B, A	az M pont mozog a BA szakaszon
DIST r = B, M	r a BM szakasz hossza
DIST p = A, B	p az AB szakasz hossza
POINT N = A, C, r/p	N ugyanolyan arányban osztja AC-t, mint M BA-t, tehát BM= AN
LINE M, N	megrajzolja az MN szakaszt
POINT P = M, N, 1/2	P az MN felezőpontja

```
LOC P                         P a mértani hely
END                           leírás vége
```

A keresett mértani hely a háromszög középvonala.

A program egy menü segítségével megengedi, hogy egy adott feladatot módosítsunk, lemezre kimentsünk, új feladatot hívjunk be a lemezről, kiírjuk a lemez (vagy az adott könyvtár) tartalmát, „futtassuk" a feladatunkat. Ezáltal, tulajdonképpen egyszerű környezetben mozoghatunk, ami lehetővé teszi, hogy feladatunkat megoldhassuk. Sőt, kisebb-nagyobb módosításokkal újabb feladatokat fogalmazzunk meg. Így a tanulónak lehetősége nyílik arra, hogy kísérletezzen, és megismerje a „kis felfedezések" örömét.

Ha a fenti feladatban módosítjuk a tizedik sorban a *P* pont definícióját úgy, hogy ne 1/2-ed arányba ossza az MN szakaszt, akkor más és más mértani helyet kapunk. (Ha pl. 1/3-at veszünk, akkor a mértani hely a harmadoló vonal lesz). Mi történik akkor, ha ez az érték egynél nagyobb? Például 2. Ekkor a P pont az MN szakasz meghosszabbítására kerül, mégpedig úgy, hogy MN = NP. A mértani hely pedig egy, a háromszögön kívüli szakasz lesz.

Nézzünk még egy példát! Itt is érdemes kissé elidőzni.

Legyen M egy adott O középpontú kör változó pontja, és legyen P az OM sugár azon pontja, amelyre az OP szakasz hossza egyenlő az M pontnak a kör egy rögzített átmérőjéhez mért távolságával. Keressük meg a P pont mértani helyét!

```
POINT A = 100,140             megrajzolja az A pontot
POINT B = 300,140             megrajzolja a B pontot
POINT O = A, B, 0,5           O az AB szakasz felezőpontja
LINE A, B                     megrajzolja az AB szakaszt
DIST r = A, O                 r-rel jelöli az AO távolságot
CIRCLE O r                    megrajzolja az O középpontú r sugarú kört
VAR M CIRCLE O r              M a kör változó pontja
LINE O, M                     megrajzolja az OM sugarat
PERP M, (A, B), Q             Q az M pont AB-re eső vetülete
DIST s = M, Q                 s az MQ hossza (M távolsága AB-tól)
POINT P = O, M, s/r           P az OM-et s/r arányban osztja (OP = MQ)
LOC P                         keressük P mértani helyét
END                           leírás vége
```

A mértani hely a rögzített átmérőt és a kört belülről érintő két darab *r* átmérőjű kör. Rögtön feltehetjük a kérdést: mi történik a feladattal, ha a leírás tizenegyedik sorában a P pontot úgy definiáljuk, hogy felcseréljük az *r* és *s* értékeket? Ha van értelme a feladatnak, hogyan lehet megfogalmazni? Programunk segítségével könnyen kipróbálhatjuk, hogy mi történik a változtatás után. Meglepve vesszük észre, hogy a képernyőn két, az adott átmérővel párhuzamos érintő jelenik meg. A feladatnak tehát van értelme, és így fogalmazható meg: Adott egy O középpontú r sugarú kör, s rajta egy mozgó M pont. Jelöljük Q-val az M pontnak a kör egy adott átmérőjére eső vetületét. Határozzuk meg az OM egyenes azon pontjainak a mértani helyét, amelyekre $OP*MQ = r^2$.

Amint látható, a program lehetővé teszi nemcsak a mértani helyek megsejtését, hanem segít abban is, hogy kísérletezzünk a mértani feladatokkal.

Fontosnak tartjuk, hogy azok a programok, amelyeket az oktatásban használunk, ha csak lehet, ne kössék meg a felhasználó (diák, esetleg tanár) fantáziáját, ne csak illusztráljanak, ne csak a számítást segítsék, hanem adjanak lehetőséget kísérletezésekre, amelyek jobban megvilágítják a használt fogalmakat, segítik a diákokat a tanult anyag elmélyítésében. Egy ilyen szerény program is képes arra, hogy felkeltse a matematikához egyébként kevésbé vonzódó tanulók érdeklődését. És ez nem elhanyagolható szempont!