Feladatok a sakktáblán

RÓKA SÁNDOR

Az itt szereplő kombinatorikai feladatok mindegyike a sakktáblához kapcsolódik, közülük néhány szerepelt korábbi versenyeken, ill. a Középiskolai Matematikai Lapok pontversenyében. A téma iránt érdeklődőknek ajánlom Ujvári István: Sakkmatematika (Pesti Megyei Pedagógiai Intézet, 1990), és J. J. Gik: Sakk és matematika (Gondolat, 1989) című könyvét.

Feladatok szakkörre

1. Miért nem lehet egy 8x8-as sakktábla bal alsó sarkából a huszárt eljuttatni a jobb felső sarokba úgy, hogy mire odaér, addig a sakktábla minden mezőjét pontosan egyszer érintse?

2. A sakktábla bal alsó sarkát kivágtuk. A jobb felső sarokból indulva egy huszárral be lehet-e járni ezt a táblát úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintsünk?

3. Egy 8x8-as sakktábla egyik mezője hiányzik. Be lehet-e járni ezt a táblát egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk, s utolsónak olyan mezőre érkezünk, mely szomszédos azzal a mezővel, amelyről elindultunk?

4. A huszár n lépést tett meg a sakktáblán és visszajutott a kiindulási mezőre. Mutassuk meg, hogy n páros szám!

5. Egy 8x8-as sakktábla bal alsó sarkából el lehet-e jutni egy huszárral a jobb felső sarokba úgy, hogy közben minden sorba pontosan egyszer lépünk?

6. Mutassuk meg, hogy a 4x5-ös sakktáblát bejárhatja a huszár úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lép.

7. Bejárható-e a 4xn-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy az minden mezőre pontosan egyszer lépjen, és utolsó lépésével éppen visszaérjen a kiindulási mezőre?

8. Bejárható-e a 7xn-es sakktábla (2,3) huszárral úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk? (A (2,3) huszár olyan figura, mely L alakban 2-őt vízszintesen, 3-at függőlegesen lép, vagy fordítva.)

9. Egy nxn-es sakktáblán egy bábu léphet a szomszédos mezőre vagy jobbra, vagy felfelé, vagy átlósan balra lefelé. Bejárható-e vele a tábla úgy, hogy minden mezőre egyszer lép, s útja azon a mezőn ér véget, mely jobb oldali szomszédja annak a mezőnek, melyről elindult?

10. A 8x8-as sakktábla bal alsó 3x3-as sarkában 9 dámafigura áll. El lehet-e juttatni ezt a 9 bábut

a/ a bal felső

b/ a jobb felső

3x3-as sarokban, ha lépni csak úgy lehet, hogy egy másik figurát vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan átugorva üres mezőre lépünk?

11. Legfeljebb hány huszárt helyezhetünk el a 8x8-as sakktáblán úgy, hogy egyik se üsse a másikat?

12. Legfeljebb hány huszárt helyezhetünk el az 5x5-ös sakktáblán úgy, hogy egyik se üsse a másikat?

13. Helyezzünk el minél kevesebb huszárt a 3x3-as, a 4x4-es, 5x5-ös, ..., 8x8-as, 9x9-es, 10x10-es sakktáblán úgy, hogy azok ütés alatt tartsák a nem foglalt mezőket!

14. Legfeljebb hány királyt helyezhetünk el a 8x8-as sakktáblán úgy, hogy egyik se üsse a másikat?

15. Helyezzünk el a 8x8-as sakktáblán minél több királynőt úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást!

16. Helyezzünk el a 8x8-as sakktáblán minél kevesebb királynőt úgy, hogy azok a tábla minden mezőjét ütés alatt tartsák!

17. Legkevesebb hány királyt kell a 8x8-as sakktáblán elhelyezni, ha minden mezőt ütés alatt akarunk tartani?

18. Legfeljett hány királynő helyezhető el a 8x8-as sakktáblán úgy, hogy mindegyik legfeljebb egy másikat üssön?

19. A 3x3-as sakktábla két felső sarkában fekete, a két alsó sarokban fehér huszárok állnak. Elérhető-e néhány lépéssel, hogy az azonos színű huszárok a szemközti sarkokban legyenek?

20. A 3x3-as sakktábla két felső sarkában fekete, a két alsó sarokban fehér huszárok állnak. Elérhető-e néhány lépéssel, hogy a világos huszárok helyet cserélnek a sötétekkel? Mennyi a lépések minimális száma?

21. A 8x8-as sakktábla mezőibe sorfolytonosan beírtuk 1-től 64-ig a számokat. Kiválasztunk 8 számot úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból választottunk. Milyen határok között mozoghat ezen számok összege?

22. A 8x8-as sakktáblán elhelyeztünk 8 bástyát úgy, hogy nem ütik egymást. Mutassuk meg, hogy a fekete mezőkön álló bástyák száma páros!

23. Egy 5x5-ös sakktábla minden mezőjén áll egy bogár. Egy-egy perc eltetével mindegyik bogár átmászik valamelyik oldalszomszédos mezőre. Igaz-e, hogy minden órában van olyan pillanat, amikor valamelyik mező üresen áll?

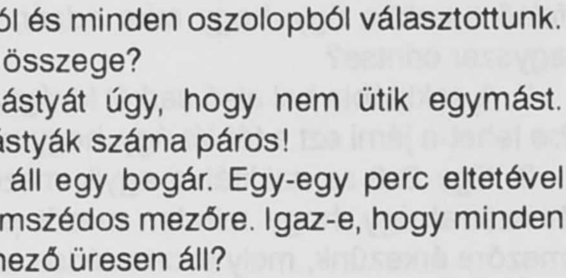
24. Egy 5x5-ös táblázatba lehet-e úgy számokat írni, hogy a számok összege minden sorban pozitív, míg az oszlopokban a számok összege negatív?

25. Egy 5x5-ös táblázatba lehet-e úgy számokat írni, hogy ezen számok összege pozitív, ám a táblázat bármely 2x2-es részében a számok összege negatív?

26. Egy 5x5-ös táblázat mindegyik sorába valamilyen sorrendben beírjuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat úgy, hogy a kapott kitöltés szimmetrikus a főátlóra. Mutassuk meg, hogy ekkor a főátlóban ott áll mind az öt szám!

27. A négyzetrácsos mezőn kiválasztottunk 100 mezőt. Mutasd meg, hogy ezek között van 25 olyan mező, melyek közül semelyik kettőnek sincs közös pontja!

28. Az ábrán feketével jelzett 15 kör helyén érmék vannak. Az a célunk, hogy valamennyi érme átkerüljön a fehérrel jelzett körök helyére. Egy lépésben bármely érmével vízszintesen vagy függőlegesen átugorhatunk egy szomszédos érmét, ha annak túlsó oldalán éppen nincs érme. Mennyi a cseréhez szükséges lépések minimális száma?



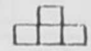
29. Egy 29x29-es négyzetrácsos papírból kivágtunk 99 olyan 2x2-es négyzetet, amelyek csúcsai rácspontok. Bizonyítsd be, hogy még egy századikat is ki tudunk vágni.

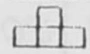
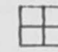
30. A 8x8-as sakktábla bal alsó és jobb felső sarkát kivágtuk. Ezt a táblát hézagmen-

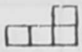
tesen és átfedés nélkül le lehet-e fedni 1x2-es dominókkal? A sakktábla mely két mezőjének hiánya esetén valósítható meg ez a lefedés?

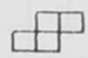
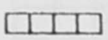
31. A 8x8-as sakktábla egyik sarokmezője hiányzik. Le lehet-e fedni ezt a táblát 1x3-as dominókkal? A sakktábla mely mezőjének hiánya esetén valósítható meg ez a lefedés?

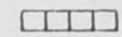
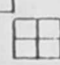
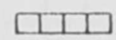
32. Egy 10x10-es sakktáblát le lehet-e fedni 1x4-es dominókkal?

33. Egy 10x10-es sakktáblát le lehet-e fedni  alakú dominókkal?

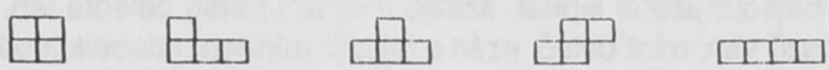
34. Lefedhető-e a 8x8-as sakktábla 15 db  alakú és 1 db  alakú dominóval?

35. Lefedhető-e a 8x8-as sakktábla 15 db  alakú és 1 db  alakú dominóval?

36. Lefedhető-e a 8x8-as sakktábla 15 db  alakú és néhány , ill.  alakú dominóval?

37. Egy téglalap lefedhető  alakú dominókkal, s lefedhető  alakú dominókkal is. Lefedhető-e 1 db  alakú és néhány  alakú dominóval is?

38. Lehet-e téglalapot összerakni az ábrán látható öt alakzatból?



39. Egy 9x14-es táblát le lehet-e fedni 10 db 3x2-es és 11 db 2x3-as dominóval?

40. Egy 55x39-es táblát lefedhetünk-e 5x11-es dominókkal? (Itt, s az előzőt kivéve a többi feladatban is, a dominók elforgathatók.)

41. A 11x12-es sakktábla lefedhető-e 20 db dominóval, ha 1x6-os és 1x7-es dominókból válogatunk (12 db 1x7-es és 8 db 1x6-os). Le tudjuk-e fedni ezt a táblát 19 dominóval is, ha most is csak 1x6-os és 1x7-es dominókat használhatuk?

42. 1x2-es dominókkal lefedtünk egy

a) 6x6-os

b) 4x100-as sakktáblát. Mutassuk meg, hogy van olyan vízszintes vagy függőleges rácsegyenes, melyet dominó nem keresztez!

43. A 8x8-as sakktábla összes mezőjét egy kivételével átfeshetjük-e fehérre, ha egy lépésben valamely sor, vagy valamely oszlop mezőinek színét ellentétesre változtatjuk?

44. A 8x8-as sakktábla összes mezőjét egy kivételével átfeshetjük-e fehérre, ha egy lépésben valamely 2x2-es rész mezőinek színét ellentétesre változtatjuk?

45. A 8x8-as sakktábla összes mezőjét egy kivételével átfeshetjük-e fehérre, ha egy lépésben valamely sor és valamely oszlop mezőinek színét ellentétesre változtatjuk?

46. A 8x8-as sakktábla mindegyik mezőjén van egy kocka, melynek valamelyik oldala fekete, a többi fehér. Elérhető-e mindig, hogy a kockák fekete oldala legyen felül, ha egy-egy alkalommal valamelyik sorban, vagy valamelyik oszlopban levő kockákat fordíthatjuk el közös tengelyük mentén? (A kockák lapjai a sakktábla mezőivel egybevágók.)

47. Kirakható-e egy 7x9x11-es tégla 3x3x1-es téglákból?

48. Kirakható-e egy 6x6x6-os kocka 1x2x4-es téglákból?

49. Egy téglatest alakú ládát meg tudunk tölteni 1x2x4-es téglákkal. Mutasd meg, hogy ekkor a láda úgy is kitölthető, hogy az ugyanolyan hosszú téglaélek párhuzamosak!

50. A 3x3x3-as kockát oldallapokkal párhuzamos síkokkal 27 db egybevágó kockára vágtuk. Ezeket egymás után elvehetjük-e úgy, hogy mindegyik lap szomszédos az előzőleg elvett kockával, s a középső megmarad?

Útmutatások a feladatok megoldásához

1. A huszár fekete mezőről fehérre, fehérről feketére lép. Ha a bal alsó sarok fekete, akkor innen indulva a 63. lépésben nem léphet a jobb felső fekete mezőre, hiszen ekkor fehér színű mezőre lép.

2-5. Hasonló az előzőhöz.

6.

1	20	5	14	9
6	15	10	19	4
11	2	17	8	13
16	7	12	3	18

7. Tekintsük a táblát négysorosnak, két belső és két szélső sorra. Egy szélső mezőre a huszár csak belső mezőről léphet, szélső mezőről pedig belsőre lép. Mivel ugyanannyi szélső mező van, mint belső, ezért a huszár minden második lépésében szélső mezőre lép, s mivel a huszár felváltva lép fehérről feketére, így a szélső mezők mindegyikének fehérnek (vagy feketének) kellene lennie.

8. Hasonló az előzőhöz.

9. Nem. Legyen a jobbra, a felfelé, a balra lefelé történő lépéseinek száma rendre x, y, z. A feltétel szerint: $x+y+z = n^2-1$, $y= 2$, $x = 2+1$. Ezekből $3z+2 = n^2$, de négyzetszám 3-mal osztva 2 maradékot nem adhat.

10. a) Nem lehet. Fekete (fehér) mezőn álló bábu ismét fekete (fehér) mezőre lép.

b) Nem lehet. Színezzük a tábla sorait felváltva fehérre, feketére. Ekkor a 9 figurából pl. 6 áll fekete, 3 fehér mezőn. Ez a lépések során nem változik, pedig a célul kitűzött állapotban 6 figurának fehéren, 3-nak feketén kell állnia. Ez egyben újabb indoklás az a) feladatra.

11. 32 huszár elhelyezhető, pl. ha mindegyiket fehér mezőre tesszük. Többet nem lehet, hiszen a tábla ábra szerinti 2x4-es részére legfeljebb 4 huszár helyezhető (ugyanis az azonos számmal jelölt mezőkből legfeljebb az egyiken állhat huszár), így az egész táblán legfeljebb 8x4 huszár állhat.

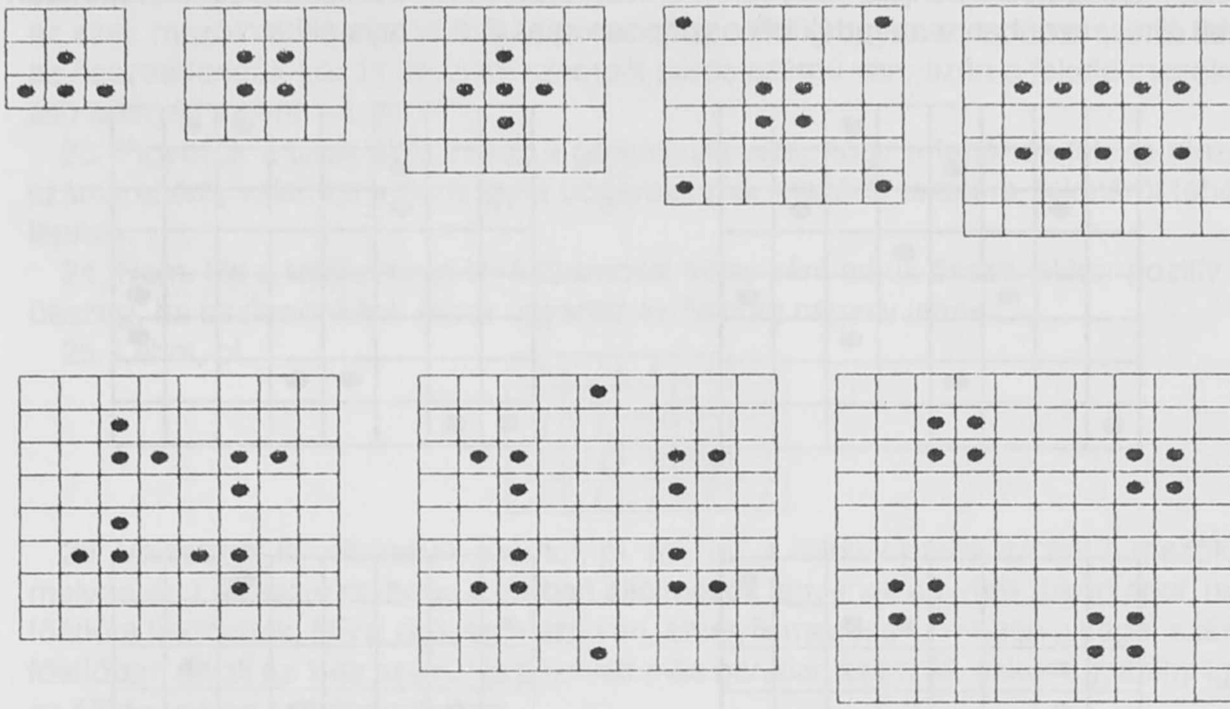
1	2
3	4
2	1
4	3

12. Az egyszínű mezők száma 12 és 13, ezért 13 huszár elhelyezhető a kívánt módon. Többet nem lehet feltenni, mert ahogyan az ábrák mutatnak egy-egy bejárási sorszámozást, amiatt nem állhatnak huszárok szomszédos sorszámú mezőn.

1	20	9	14	3
10	15	2	19	24
21	8	25	4	13
16	11	6	23	18
7	22	17	12	5

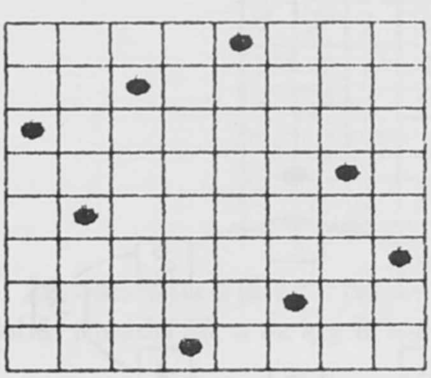
1	10	15	22	3
16	21	2	9	14
11	8	17	4	23
20	25	6	13	18
7	12	19	24	5

13.

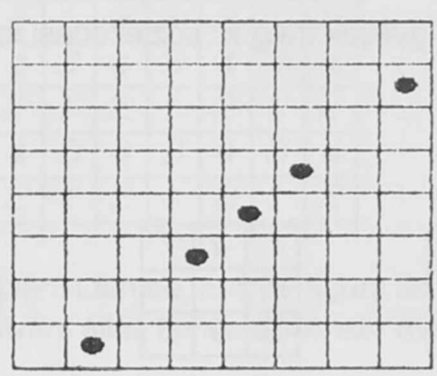


14. Osszuk a táblát 4x4-es részekre. Egy 4x4-es részben legfeljebb egy király lehet, így a táblán legfeljebb 16 király helyezhető el.

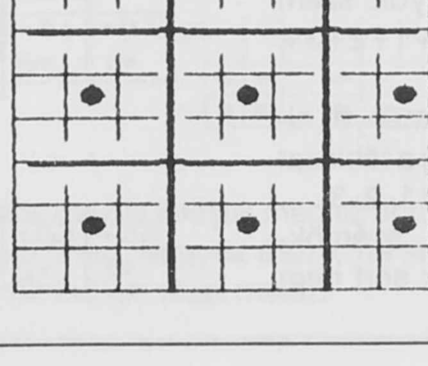
15.



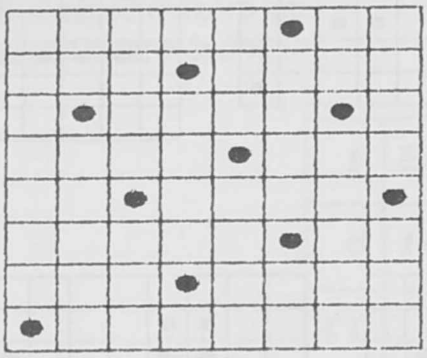
16.

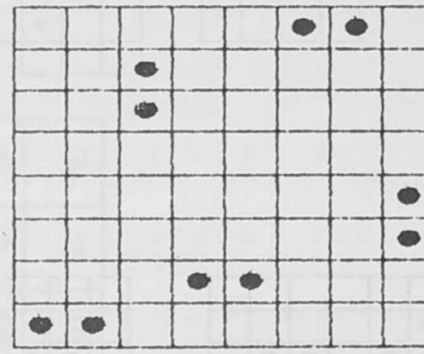


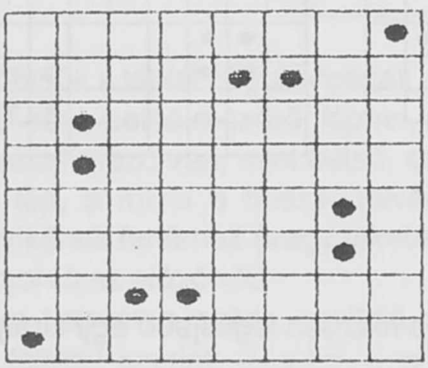
17. A bekeretezett területeken kell állnia királynak, különben lenne olyan mező, mely nem áll ütés alatt. Tehát legalább 9 király szükséges, s az ábra mutatja, hogy ez el is érhető.

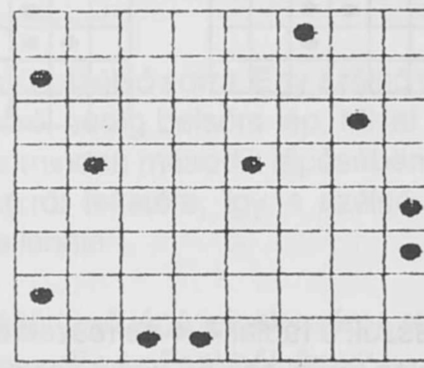


18. 10-et lehet (az ábrák mutatják). Többet nem, még bástyát sem. Ha 11 bástya van, akkor kell lennie 3 sornak, melyben 2-2 bástya áll. Ezeknek különböző oszlopokban kell állnia, azonban a maradék két oszlopban csak 2x2 bástya állhat.

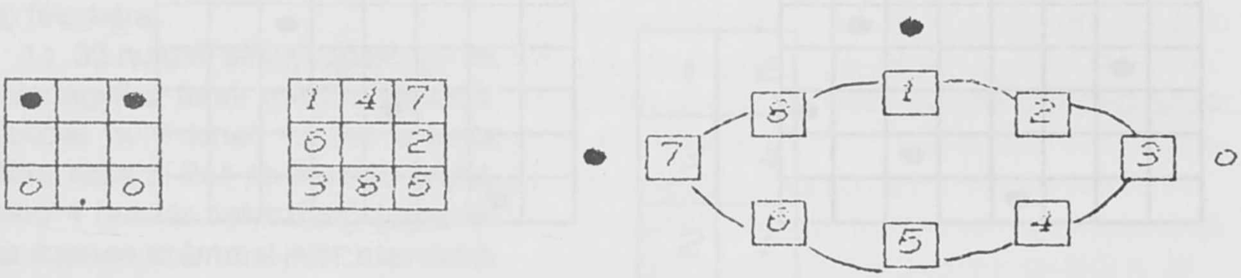








19-20. Figyeljük meg a "közlekedési szabályokat".



21.Mindig uganazt a számot kapjuk az összegzéskor. Ugyanis a számokat az ábra szerint felbontva két szám összegére látható, hogy a nyolc szám összege: 0+8+16+...+56+1+2+3+ +...+8.

0+1	0+2	0+3	. . .	0+8
8+1	8+2	8+3	. . .	8+8
16+ +1	16+ +2	16+ +3	. . .	16+ +8
.	.	.	.	.
56+ +1	56+ +2	56+ +3	. . .	56+ +8

22. Az előző feladat eredményét alkalmazzuk. Számozzuk meg a táblázat mezőit, soronként kitöltve az 1, 2, 3, ..., 8, 10, 11, 12, ..., 17, 19, 20, ... számokkal (vigyázat! pl. a második sort nem

9-cel kezdtük, hanem 10-zel). Így értük el, hogy fekete mezőkön mondjuk páratlan számok állnak, a fehéreken páros számok. Ha elhelyeztük a nyolc bástyát, adjuk össze az ezek mezőin álló számokat, a végeredmény mindig ugyanaz a páros szám, tehát az összeadandók között páratlan számból páros számú van, ezért a fekete mezőkön álló bástyák száma páros.

23. Figyeljük a tábla színezését, s gondoljunk arra, hogy a fehér és fekete mezők száma eltérő, valamint arra, hogy a bogarak fehér mezőről feketére, feketéről fehére lépnek.

24. Nem. Ha a táblázatban levő számokat soronként adjuk össze, akkor pozitív az összeg, ha oszloponként, akkor ugyanez az összeg negatív lenne.

25. Lehet, pl.

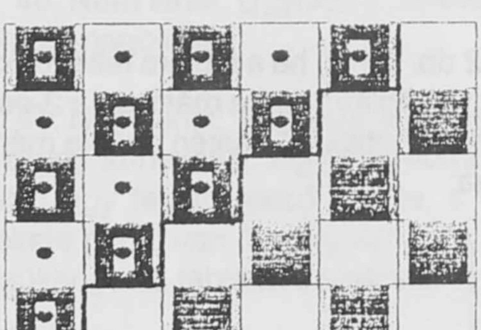
1	1	1	1	1
1	−4	1	−4	1
1	1	1	1	1
1	−4	1	−4	1
1	1	1	1	1

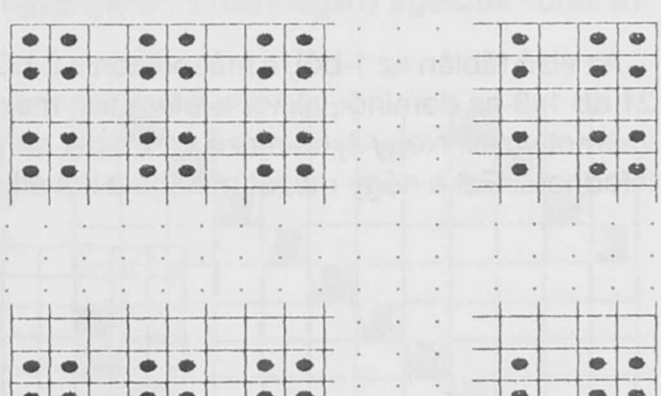
26. Válasszuk ki valamelyik számot, pl. az 1-et, s állítsuk párba azokat a mezőket, melyen az 1 áll aszerint, hogy a párban álló mezők legyenek egymás tükörképei, ha a főátlóra tükrözünk. Mivel öt ilyen mező van, amelyik mezőnek önmaga a képe, ezért a főátlóban ott áll az 1-es szám. Ha 5 helyett más páratlan szám áll, akkor ugyanígy igaz az állítás, páros számra már nem.

27. Számozzuk meg a végtelen négyzetrács mezőit az ábra szerint az 1, 2, 3, 4 számokkal.A 100 mezőből legalább 25 mezőn ugyanaz a szám áll, s ezeknek a mezőknek megvan a kívánt tulajdonsága.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

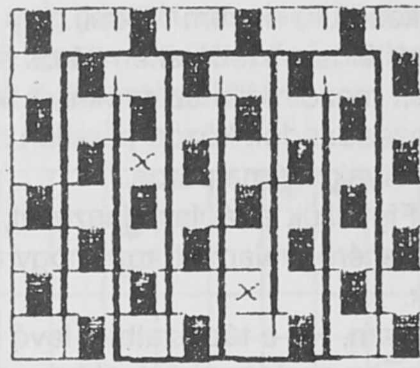
28. Játsszuk a játékot fekete-fehér sakktáblán! Látható, hogy 9 figura fekete, 6 pedig fehér mezőn áll, s ez így is marad. Ezért a kívánt állás nem valósítható meg.





29. A 29x29-es négyzetrács mezőit jelöljük meg az ábra szerint pontokkal. Összesen 100 db 2x2-es részt jelöltünk meg. Vegyük észre, ha kivágtunk egy 2x2-es részt, az csak egy pontokkal megjelölt 2x2-es részt metsz.

30. A hiányos sakktáblán nem egyenlő a fekete és a fehér mezők száma, s a dominók ugyanannyi fehér és fekete mezőt fednek le. Ha egy fekete és egy fehér mezőt "tiltunk le", akkor az ábrán megrajzolt "útvonal" mutatja a lefedés módját.



31. A sakktáblát az ábra szerint színezve, számozva, bárhogyan is helyezünk a táblára 1x3-as dominót, az mind a három számból egyet-egyet lefed. Ha a táblát lefedtük volna, akkor ugyanannyi lenne a táblán az 1, 2, 3 számok mindegyikéből; mindegyikből 21, de pl. az 1-ből 22 db van. Tehát a tábla nem fedhető le.

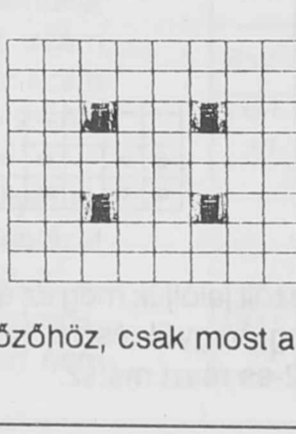
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
	1	2	3	1	2	3	1

Tekintsük a 8x8-as sakktábla ábrák szerinti két számozását:

1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Az első táblán az 1-ből, a másodikon a 2-ből van 22 db. Tehát, ha a táblára feltettünk 21 db 1x3-as dominót, akkor a lefedetlen mező az egyik táblán 1-es, a másikon a 2-es számot viseli. Négy ilyen mező van, ezek bármelyikének "letiltása" esetén a tábla már lefedhető. Ezt a négy mezőt mutatja a következő ábra:



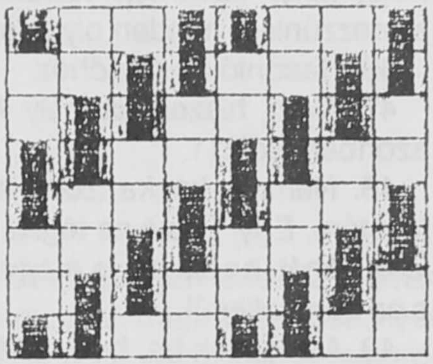
32. Nem lehet. Hasonló az előzőhöz, csak most a mezőket az 1, 2, 3, 4 számokkal számozzuk.

33. Nem lehet. Színezzük a sakktáblát a szokásos módon. Az adott síkidom 1 vagy 3 feket mezőt fed le, a 10x10-es tábla lefedéséhez szükséges 25 db dominó páratlan számú fekete mezőt fed le, tehát nem fedheti le az 50 fekete mezőt.

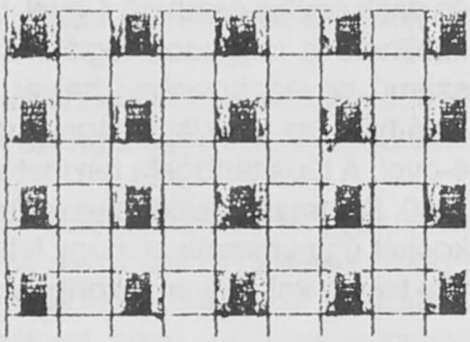
34. Nem lehet. A megadott dominók páratlan számú fekete mezőt fednek le.

35. Nem lehet. Színezzük a sakktábla sorait felváltva fehérre, feketére. A dominók páratlan számú fekete mezőt fednek.

36. Nem lehet. Tekintsük a tábla ábra szerinti színezését, s vizsgáljuk a dominók által fedett fekete mezők számának párosságát.



37. Nem lehet. Tekintsük a téglalap ábra szerinti színezését. Mivel 1x4-es dominókkal lefedhető, ezért a fekete mezők száma páros. Azonban, ha 1 db 2x2-est elhelyeztünk, akkor páratlan számú fekete mező marad, s a téglalap többi része csupán 1x4-es dominókkal már nem fedhető le. (A feladatban levő egyik feltételre nem volt szükség. Melyikre?)

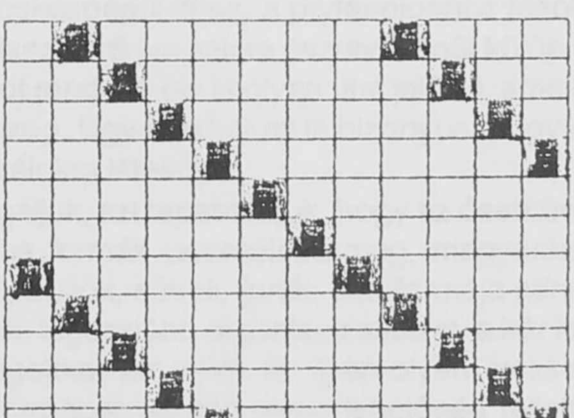


38. Nem lehet. A keresett téglalapot sakktáblaszerűen színezve 10 fehér és 10 fekete mező lesz a táblán. A megadott alakzatokkal nem lehet 10 fekete mezőt lefedni.

39. Nem lehet. Színezzük a sakktábla sorait felváltva fehérre, feketére. Ekkor 5 sor fehér (= 70 fehér mező), 4 sor fekete (= 56 fekete mező). A 11 db 2x3-as dominó 33 fekete mezőt fed, a 10 db 3x2-es dominó pedig páros számú fekete mezőt fed. Tehát a dominók páratlan számú fekete mezőt fednek, miközben a fekete mezők száma 56, páros szám.

40. Nem lehet. Ugyanis a $39=5a+11b$ egyenletnek a nemnegatív egészek körében nincs megoldása.

41. Nem lehet. Tekintsük a téglalap ábra szerinti színezését. Egy-egy dominó lefeljebb egy fekete mezőt fed le, s mert 20 fekete mező van, így legalább 20 dominó szükséges a tábla lefedéséhez.



42. a/ Ha egy rácsegyenest keresztez dominó, akkor keresztezi még egy, hiszen az egyenes bármelyik oldalán páratlan számú fedetlen mező maradt. Ha mind a 10 rácsegyenest keresztezi dominó, akkor ez legalább 20 db dominót jelent, azonban a tábla lefedéséhez 18 db dominó szükséges.

43-44. Nem lehet, ugyanis egy-egy átfestés nem változtatja meg a fekete mezők számának párosságát.

45. Igen, lehet. Bármely színezés megvalósítható, ugyanis néhány átfestéssel elérhető, hogy csak egy tetszőlegesen választott mező színe változzon meg. Ehhez színezzünk át minden olyan sor-oszlop párt, mely a kiválasztott mezőt tartalmazza.

46. Hasonló az előzőhöz.

47. Nem, hiszen bármely 7x11x1-es rétegben a kis téglák 3n helyet foglalnak el, azonban 3x7x11.

48. Nem. A kocka 2x2x2-es részeit felváltva színezzük sakktáblaszerűen fehére, feketére. Egy 1x2x4-es téglát bárhogyan is helyezünk el, annak fele fekete, fele fehér lesz. Tehát, ha a kirakás megvalósítható, akkor a 6x6x6-os kocka fele fehér, fele feketes ez nem teljesül.

49. Azt lássuk be, hogy a láda három, a, b, c oldalhosszából legalább kettő páros, és ezek egyike osztható 4-gyel. Ha pl. a és b is páratlan lenne, akkor a láda nem lenne kitölthető a megadott téglákkal, hiszen bármely axbx1-es rétegből a téglák páros számú egységkockányi helyet foglalnak el. Az előző feladat megoldását követve belátható: az nem lehetséges, hogy a, b, c mindegyike páros, ám egyik sem osztható 4-gyel. A láda térfogata osztható 16-tal. Ezekből következik a várt állítás.

50. Színezzük sakktáblaszerűen az egységkockákat felváltva fehérre, feketére. A 26 kockát úgy vesszük el, hogy felváltva veszünk fehér és fekete kockát, tehát a kockák fele fekete kell legyen, azonban ez nem teljesül.