A balkezes gyermek

MAJOROS MÁRIA

A tanítás során különösen érdekes tapasztalatot jelentett számomra a balkezes gyerekek matematikatanulása. Általános következtetést a megfigyelt tanulási jelenségek pszichológiai magyarázatára nem tudok levonni, mert teljesen nyitott kutatási területről van szó. A tanulási minták közreadására mégis azért szántam rá magam, mert ezeknek a gyerekeknek a matematikatanulási sajátossságai gyakorlatilag ismeretlenek a tanárok számára.

1984-ben egyik tanítványom egyenletmegoldásánál vettem észre, hogy következetesen másképp gondolkodik. *Gyula* egy művészeti szakközépiskola első osztályos tanulója volt akkor. A szakközépiskolás tankönyv egyik feladatán mutatom be a kettőnk gondolkodása közötti különbséget.

„Két állványon könyvek vannak. Az első állványon 7-szer annyi könyv van, mint a másodikon. Amikor az első állványról elvittek 12 könyvet, és a másodikra 8-at tettek, akkor az első állványon 154-gyel több könyv volt, mint a másodikon. Hány könyv volt mindegyik állványon?"

Az én megoldásom:	Gyula megoldása:
$7x-12=x+8+154$	$x-12-154=x/7+8$

Ha a feladat lehetővé tette, akkor ehhez hasonló szimmetriák mindig megfigyelhetők voltak *Gyula* matematikai értelmezéseiben. Ha én úgy gondolkodtam, hogy az egyik mennyiséghez hozzá kell adni, ahhoz, hogy a másikkal egyenlőt kapjunk, *Gyula* a másikból vonta le ugyanazt a számot, ahhoz hogy az egyenlőség igaz legyen. Ha én az egyik mennyiséget szoroztam, hogy a másikkal egyenlőt kapjak, *Gyula* mindig a másodikat osztotta, és így tette azt az elsővel egyenlővé. Ha választani lehetett, én, aki jobbkezes vagyok, mindig automatikusan az összeadás és a szorzás, tehát a növekedés irányában kerestem a megoldást, *Gyula* mindig kivont és osztott, tehát a csökkenés irányában gondolkodott.

A valós számkörben a szorzás kommutatív. Én automatikusan balról jobbra szoroztam, *Gyula* jobbról balra végezte ugyanazokat a műveleteket.

$a(b+c)=ab+ac$	$a(b+c)=ca+ba$
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$	$(a+b)(c+d)=db+da+cb+ca$

Természetesen egy idő múlva megtanulta a másik szempontból történő gondolkodást is, és felváltva írta fel a megoldásokat, hol így, hol úgy.

Amikor *Gyulát* tanítottam, akkor értettem meg, hogyan történhetett meg az egyik osztályomban korábban, hogy egy balkezes gyerek nem tudott ülésrendet írni számomra. Amikor új osztályt kezdtem tanítani, mindig megkértem a hozzám legközelebb ülő gyereket, hogy írjon egy olyan ülésrendet, ahogyan én látom az osztályt. *Dávid* az osztálynak háttal ülve képtelen volt elképzelni, hogyan néz az ki szemből. Két tengelyes tükörképet és egy középpontos tükörképet kaptam. Végül egy kislány írta meg *Dávid* helyett az ülésrendet.

A saját gyerekem is balkezes. *Zoli* az első osztályban a10-es átlépést tanulta. Miután egy csúnya, makacs mumpsz miatt hosszú ideig hiányzott az iskolából, együtt tanultunk, hogy a hiányosságokat pótoljuk. A 14-et kellett felbontania két szám összegére.

14+0
13+1
12+2
11+3
10+4
.....
.....
.....
0+14

Szerettem volna rávezetni a felbontásban megfigyelhető szabályosságra, ezért arra kértem, figyelje meg, ahogyan növekednek az egyik oszlopban a számok, úgy csökkennek a másikban. Nem értette. Mivel a gyerek gondolkodásához illeszkedő jobb magyarázatot nem tudtam mondani, ezért elismételtem ugyanazt. *Zoli* teljesen értetlenül nézett hol rám, hol pedig a számoszlopra. Végül felragyogott az arca, és megkérdezte, azt akarom-e mondani, hogy az egyik számoszlopban mindig eggyel kisebb szám van. Míg én a növekedés szabályosságára figyeltem, addig ő a csökkenésre.

Az előző példák azt mutatták, hogy egy balkezes ember számára érthetetlennek tűnhet egy jobbkezes ember gondolatmenete. A következő esettanulmánnyal azt szeretném bemutatni, hogy ez fordítva is megtörténhet.

Zoli a következő feladatot oldotta meg második osztályos korában:

Kati, Feri, Panni és Zsolt virágot szedtek. Mindegyik ugyanannyit. 4 vázában osztották szét, mindegyikbe 7 szál virág került. Mennyit szedett Feri, Mennyit szedtek együtt?

7·4=28 „Mindegyik vázába 7 szál virágot tettek, és 4 váza volt, tehát 28 szál virágot szedtek összesen."

7+7+7+7+7=28 „Így is írhatom."

Arra a kérdésre, hogy hány szál virágot szedett Feri, a következő műveletet írta le *Zoli:*

28:7=4

Megkértem, olvassa el még egyszer a feladat szövegét, mert rosszul válaszolt. A gyerek újraolvasás után sem tudta a megoldást kijavítani. Megkértem, magyarázza el szavakban is a gondolatmenetét, úgy gondoltam ezzel segítek neki. Nagyon meglepődtem, mert szóban helyesen válaszolt: „Négyen mentek virágot szedni, 28 szálat szedtek összesen, ezért úgy gondolkodtam, hánnyal kell elosztani a 28-at, hogy négyet kapjak eredményül."

Ha összehasonlítjuk a kettőnk gondolatmenetét, akkor én a $28/4=\ldots$ feladatot oldottam meg, a gyerek a 28:...=4 feladatot. Matematikai tartalmát tekintve az egyik művelet a részekre osztás művelete volt, a másik bennfoglalás. Mivel *Zoli* más nézőpontból kezelte a problémát, ez arra enged következtetni, hogy a kettőnk által alkalmazott gondolkodási műveletek a reciprocitás viszonyában állnak egymáshoz képest.

Danit nyolcadik osztályos korában tanítottam rövid ideig. A kisfiú fél évig külföldön élt. Hazatérte után azért vett részt néhány órán, hogy az iskolában ez alatt az idő alatt tárgyalt néhány alapvető fogalmat áttekintsük. *Dani* nagyon okos gyerek volt, így az iskolai anyaggal gyorsan végeztünk, és maradt időnk arra, hogy nehéz gondolkodtató feladatokat oldjunk meg a gimnáziumi felvételi vizsgához.

Az első feladat, melynek összehasonlító megoldását ismertetem, a következő volt:

„Állapítsuk meg A∪B∪C elemeinek számát az alábbi táblázatban közölt adatok alapján!

Halmaz	Elemeinek száma
A	17
B	11
C	16
A∩B	4
A∩C	7
B∩C	6
A∩*B*∩*C*	4"

A feladat megoldásához segítségképpen megbeszéltük, milyen rajzot célszerű készíteni. *Dani* otthon azonban nem támaszkodott a szemléletre, hanem a feladat megoldását fejben végezte.

Az összeszámlálás szokásos gondolatmenete:

Összeadjuk az *A, B* és *C* halmazok elemeinek számát:

17+11+16=44

E művelet elvégzése során azonban az

A∩*B, A*∩*C* és *B*∩*C* halmazok elemeit kétszer számoltuk meg, így

4+7+6=17-et

le kell vonnunk a kapott eredményből:

44–17=27

A kivonás során azonban az

A∩*B*∩*C*

halmaz elemeit pontosan háromszor vontuk le, tehát a kivonás elvégzése után őket egyetlen egyszer sem számoltuk meg, így 4-et hozzá kell adnunk a 27-hez:

27+4=31

Dani gondolatmenete:

Először *Dani* is összeadta a 17-et, a 11-et és a 16-ot. A továbbiakban azonban úgy gondolkodott, hogy az összeadás során háromszor számolta meg az

A∩*B*∩*C*

halmaz elemeit, ezért kétszer levonta őket: 44-8=36

Mivel az

A∩*B*∩*C*

halmazt ilyen módon rendbetette, a következő állításait az

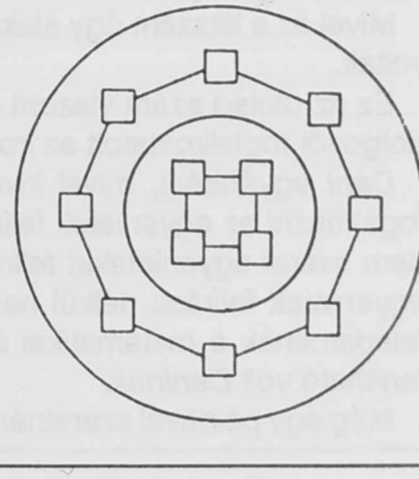
(*A*∩*B*)\(*A*∩*B*∩*C*),

(*A*∩*C*)\(*A*∩*B*∩*C*),

(*B*∩*C*)\(*A*∩*B*∩*C*)

halmazokra mondta ki, miszerint a kétszer történő számlálás csak 4–4, 7–4, 6–4 számú elemet érint, tehát a 36-ból le kell vonni 0+3+2 elemet. 36–5=31 számú eleme van tehát a halmaznak.

Míg az én megoldásom és az általam ismert feladatmegoldások általában kívülről befelé haladva számolják össze a keresett halmaz elemeinek a számát, addig *Dani* belülről kifelé haladva gondolkodott. Valószínűleg nemcsak balkezességével, hanem okosságával is összefüggött, hogy általában deduktív gondolatmeneteket követett a feladatok megoldásában. Nézzük például a következő feladatot:



„Helyezd el a számokat 1-12-ig a négyzetekben úgy, hogy a külső körbe eső számok összege éppen a kétszerese legyen a belső körbe eső számok összegének."

Dani összeadta a számokat 1-12-ig, 78-at kapott. Azt mondta, hogy 78 harmadrésze kerül a belső körbe, kétharmada pedig a külső körbe. Ahhoz, hogy így gondolkodjon, eleve fel kellett tennie, hogy a számok beírhatók, és be is írtuk őket. Ezután úgy folytatta, ha a belső körbe eső számok összege 26, akkor a feladatnak annyi megoldása van, ahányféleképpen 1-12-ig négy egész szám összegeként a 26-ot elő tudjuk állítani, és gyorsan mondott is egy előállítást: 12+3+6+5. A többi kerül a külső körbe, fejezte be a megoldást.

Dani következő feladatmegoldásán azt szeretném bemutatni, hogy a balkezességéből és okosságából fakadó következetesen deduktív gondolatmenetei milyen nagy akadályt jelentettek abban, hogy az iskolai feladatmegoldási stílushoz alkalmazkodni tudjon. (Gondoljuk el, milyen nehéz helyzetben van egy ilyen gyerek merev tanár vagy strukturalista-formalista tanítási stílus esetén.)

Szöveges egyenletet oldottunk meg:

„Egy iroda új igazgatót kapott. Működését azzal kezdte, hogy az alkalmazottak számát megduplázta. A következő hónapban felvett további 7 dolgozót. Ezután megsokallotta alkalmazottainak számát, és elbocsátotta a dolgozók 40%-át. Kisvártatva kiderült, hogy akadozik a munka, nosza gyorsan felvett 15 embert. A takarékossági intézkedések hatására el kellett bocsátania a dolgozók egyharmadát. Így 24-en maradtak. Hányan dolgoztak az irodában az igazgató érkezésekor?"

Ha a szöveget szó szerint követjük, akkor a következő egyenletet írjuk fel:

$2x+7-0,4(2x+7)+15-1/3[2x+7-0,4(2x+7)+15]=24$

Ennek a kifejezésnek a felépítésében kizárólag induktív lépésekre hivatkozunk.

Ha nem követjük a szöveget mechanikusan, akkor az elbocsátásoknál a megmaradt dolgozókat vesszük figyelembe, és így egy lényegesen egyszerűbb matematikai kifejezést kapunk:

$2/3[0,6(2x+7)+15]=24$

Ennek a kifejezésnek a felépítésében hol induktív, hol deduktív lépésekre hivatkozunk.

A deduktív gondolatmenetet követő gyerekek számára mindkét egyenlet felírása nehéz, ha nem tanítjuk meg a nézőpontok különbözőségét. Ezt a nehézséget fokozza, hogy ezek a gyerekek az egyenlettel történő megoldást tökéletesen feleslegesnek érzik, hiszen egy deduktív gondolatmenetet követve sokkal gyorsabban oldják meg fejben a feladatot. Természetesen *Dani* is fejben okoskodott:

„Mivel a 24 dolgozó az utolsó előtti létszám kétharmada, így megelőzően 36-an voltak.

Ez egy olyan létszámváltozás következménye volt, amikor 15 embert felvettek, tehát megelőzően 21-en voltak.

Ez a létszám viszont egy 40%-os elbocsátás eredményeként alakult ki, tehát korábban 35 dolgozója volt az irodának.

Mivel ez a létszám úgy alakult ki, hogy 7 embert felvettek, tehát a felvétel előtt 28-an voltak.

Ez az utolsó szám viszont egy létszámduplázás eredménye volt, így eredetileg 14 dolgozót foglalkoztatott az iroda."

Dani egyébként, mivel kivételesen intelligens volt, teljesen pontosan meg tudta fogalmazni az egyenletek felírásával kapcsolatos problémáját. Elmondta, hogy azért nem szeret egyenleteket felírni, mert abba mindig „belegabalyodik". Természetesen egyenletek felírása nélkül nem minden esetben tudunk boldogulni. Az ilyen típusú feladatoknak a matematikai szimbólumok nyelvére történő átfogalmazása könnyen tanítható volt *Daninak*.

Még egy példával szeretném alátámasztani, hogy a balkezes gyerek más nézőpontból történő probléma-megközelítésével mindig számolnunk kell. *Zoli* rendezési feladatot oldott meg:

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat kellett rendeznie a következő tulajdonságok szerint. Az *A* halmazba az 5-nél nagyobbak tartoznak, a *B* halmazba a 9-nél kisebbek.

A gyerek nem az elemeket rendezte a tulajdonságokhoz, hanem a tulajdonságokat az elemekhez. Az ilyen típusú globális megközelítés nagyon megnehezíti a helyes megoldást, hiszen a gyerek fejben gondolkodik végig, és csak a végeredményt írja le. Pontosan a következőről volt szó:

Gondolatban elékszítette az 5-nél nagyobbak halmazát:
6, 7, 8, 9.
Ugyancsak gondolatban elkészítette a 9-nél kisebbek halmazát:
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
Ugyancsak fejben kereste meg a mindkét tulajdonsággal rendelkező elemeket:
6, 7, 8.
Ebben az esetben természetesen szintén fejben kellett megkeresni az
A\B és *B\A*
halmazok elemeit, ahhoz, hogy a halmazábrát helyesen tudja kitölteni.

A gyerek nagyon gyorsan megértette, hogy a nagy hibalehetőség miatt célszerű az izoláló szemléletet követni, és az elemeket egyenként vizsgálni.

Mindnyájan érzékeljük, hogy a jobbkezes emberek természetes gondolatmenetének követése sok esetben nézőpontváltásra kényszeríti a balkezes gyerekeket, ezért a tanulás sokkal nagyobb intellektuális erőfeszítést jelent számukra.

JEGYZET

Részlet a szerző Oktassunk vagy buktassunk c. könyvéből, amely részben a PSZM projekt támogatásával jelent meg.