

**Lieven Verschaffel* – Joke
Torbeyns* – Koen Luwel* – Wim
Van Dooren* – Bert De Smedt****

* Leuven, Center for Instructional Psychology and Technology – ** Leuven, Center for Special Education
Katholieke Universiteit Leuven

A stratégiahasználat rugalmassága az alsó tagozatos matematikában: elemzés és fejlesztés

A neveléslélektan kutatói és a matematikát tanítók régóta hangsúlyozzák annak pedagógiai jelentőségét, hogy felismerjük és serkentsük a gyerekek önmaguk alkotta stratégiáinak rugalmasságát, ami fontos pillére az alsó tagozatos matematikatanítás innovatív megközelítésének. Készítettek és kipróbáltak olyan tananyagokat és fejlesztő programokat, amelyekkel ezt a fajta rugalmasságot kívánták növelni (lásd például Brownell, 1945; Freudenthal, 1991; Thompson, 1999; Wittmann és Müller, 1990-92). A múlt század végének számos reform-tantervében megjelenik a stratégia-rugalmasság kifejtésének pedagógiai értékéről alkotott meggyőződés.

Ilyen a Curriculum and evaluation standards for school mathematics, amit az NCTM adott ki az Egyesült Államokban (1989, 2000), a Numeracy Strategy az Egyesült Királyságban (DfEE, 1999), a Proeve van een Nationaal Programma voor het Reken/wiskundeonderwijs Hollandiában (Treffers, De Moor és Feijs, 1990) és az Ontwikkelingsdoelen in Eindtermen a flandriai alsó tagozatos oktatás számára (1998), valamint számos más innovatív tanterv, tankönyv, szoftver és egyéb tananyag, amelyek a reform-tantervek alapján készültek. A stratégiák rugalmasságának fontossága a legfiatalabb és a matematikából gyöngébb tanulók számára is elismert nézet (Baroody, Wilkins és Tiilikainen, 2003; Kilpatrick, Swafford és Findell, 2001; Verschaffel, Greer és De Corte, megjelenés alatt), de egyelőre kevés alapos és szisztematikus vizsgálat támogatja meggyőzően. Ebben a munkában az alsó tagozatos számtanfeladatok megoldási stratégiáinak rugalmas és adaptív (1) használatával foglalkozunk. Elsőként a stratégia-flexibilitás különböző fogalmait és alkotóelemeit mutatjuk be. Ezután azt a kérdést vizsgáljuk, vajon a stratégiák rugalmassága olyan jellemzője-e a stratégiai tudásnak, amellyel megkülönböztethetők a matematikából jó és gyöngébb tanulók. Végül megvitatjuk, vajon a stratégiák rugalmassága olyan cél-e, amelyet minden gyermek – köztük a legifjabbak és a matematikából gyöngébbek – számára célként tűzhetünk.

A stratégia-rugalmasság és -adaptivitás fogalma

A stratégia rugalmasságát vagy adaptivitását időnként úgy definiálják, mint többféle megoldási stratégia használatát – további jellemzők nélkül (például Heirdsfeld és Cooper, 2002). Többféle stratégia elérhetősége és a közöttük történő váltás képessége valóban fontos mérőszámok tekinthető a gondolkodás rugalmassága felé haladva, de ha egyszerűen különféle stratégiák használatáról beszélünk hasonló matematikai feladatok és

problémák esetén, nem vizsgálva a különböző stratégiák választásának hatékonyságát, az aligha tekinthető az adaptivitás bizonyítékának. Nyilvánvaló, hogy valaki képes lehet könnyedén váltani különböző stratégiák között teljesen esetleges vagy véletlenszerű módon, ám egyetlen stratégia következetes használata számtanfelmunkák egész sorozatán keresztül néha adaptívabb lehet, mint az egyén számára elérhető repertoárban váltogatni sokféle stratégiát (Verschaffel, Luwel, Torbeyns és Van Dooren, közlésre benyújtva).

A stratégiai rugalmasságot leggyakrabban valamilyen feladat jellemzői alapján definiálják. Van der Heijden (1993, 80.) a következő definíciót adja: „A stratégiahasználat rugalmassága magában foglalja az egyén megoldási eljárásának feladatjellemzőhöz köthető rugalmas adaptációját.” A stratégiai rugalmasságot annak elemzésével operacionálizálják, hogy a gyerekek vajon szisztematikusan használták-e az 1010 és a G10 (2) eljárásokat összeadási, illetve kivonási feladatokban a százas számkörben. Pontosan ugyanezt a meghatározást adja Blöte, Van der Burg és Klein (2001). Hasonló módon Thompson (1999, 147.) úgy foglal állást a rugalmasság fejlesztése mellett az alsó tagozatos számtanban, hogy „a mentális számolásban nagy hangsúly van azon, hogy a probléma aktuális számadataihoz megfelelő számolási stratégiát válasszunk”. Az iménti szerzők tehát először megkülönböztetnek az összeadás és a kivonás számára alkalmas stratégiákat, majd ezen stratégiák adott feladattípusok esetén megállapítható erősségeinek és gyengeségeinek ismeretében egyes „problémátípus-stratégiatípus” kombinációkat rugalmasnak, másokat rugalmatlannak minősítenek. (3) Ahogyan azt kimutattuk (lásd Verschaffel és mtsai, közlésre benyújtva), ez a nézet a rugalmas vagy adaptív stratégiahasználatról megtalálható sok úgynevezett reform-tankönyvben, amilyen például az elsősöknek írt könyv a flamand Nieuwe Reken Raak sorozatból (Bourdeaud'hui, 2002). Az első osztályosoknak írt tankönyvben a gyerekek háromféle stratégiát tanulnak meg a 10 és 20 közötti összegű összeadási feladatokra: (a) a felidézési stratégia (például fejből tudni, hogy $6+6=12$), (b) a „döntetlen” stratégia (például A $6+7$ összeadást $6+6+1$ -ként megoldani), (c) a tízre kiegészítés stratégiája (például A $6+7$ megoldása $6+4+3$ formában). Ezzel együtt a gyerekek megtanulják a stratégiákat hozzákapcsolni egy konkrét 10 fölötti összeghez, amely esetén a stratégia a leghatékonyabbnak tekinthető: (a) a felidézési stratégia a kétszer ismételt összeadandóra (például $6+6$), (b) a „döntetlen” stratégia egymáshoz közeli számok esetére (például $6+7$ vagy $8+7$) és (c) a tízre kiegészítés stratégiája az összes többi tízes átlépésű összeadásra (például $6+8$ vagy $3+9$). Bár a rugalmasságnak/adaptivitásnak ez a felfogása már kifinomultabb, mint ha egyszerűen a sokféle stratégia véletlenszerű használatát tekintenénk rugalmasságnak, véleményünk szerint igen csak problematikus a rugalmasságot/adaptivitást kizárólagosan a feladat jellemzőin keresztül definiálni és elemezni. Hiszen elképzelhető, hogy adott személy és/vagy adott körülmények esetén a stratégia-kiválasztásnak az iménti szerzők által rugalmasnak nevezett módja rugalmatlanná válik, amint ez megfordítva is lehetséges.

Az első újabb tényező, amelyet alaposan és szisztematikusan vizsgáltak és modellezték a kognitív pszichológiában (például Siegler és munkatársai: Shrager és Siegler, 1998; Siegler, 1996, 2000; lásd még Torbeyns, Arnaud, Lemaire és Verschaffel, 2004), a feladatmegoldó személyhez köthető tulajdonságok. Siegler számítógépes modellje, a Strategy Choice and Discovery Simulation (Stratégiaválasztás- és -felfedezés-szimuláció, SCADS) azt látatja velünk, hogy a konkrét stratégia (legyen az felidézés, egyszerű leszámolás vagy bármi más) kiválasztása egy adott feladathoz egy adott személy által attól függ, hogy annál a konkrét feladatnál milyen pontosan és gyorsan tudja végrehajtani azt a stratégiát, a repertoárjában meglévő más stratégiákhoz viszonyítva. Más szavakkal: a SCADS megpróbálja kiválasztani és alkalmazni azt a stratégiát, ami a sebesség és a pontosság legjobb kombinációját adja egy adott összeg esetén. A döntés az alapján születik, hogy a rendszerbe milyen sebesség- és pontosság-adatokat tápláltunk be korábban. (4) Vitathatatlan, hogy ennek a modellnek az adaptivitás-jellemzője bonyolultabb és kör-

mönfontabb nézetet képvisel a stratégiaválasztás folyamatáról, ugyanakkor pontos szimulációját adja annak, ahogyan a „valódi” gyerekek stratégiát választanak és újakat kifejlesztenek az elemi aritmetika területén. Ebben a rugalmasság-koncepcióban a feladat belső sajátosságait és az egyén jellemzőit (különösen azt, hogy milyen módon sajátít el különféle stratégiákat) együttesen, egymással összefüggésben kell figyelembe venni.

Az újabb elméleti eredmények, különösen a szociokulturális tényezők elemzésének perspektívája, arra mutatnak, hogy a rugalmasság/adaptivitás ügye még annál is komplikáltabb, mint például Siegler és kollégái modellje (*Shrager és Siegler*, 1998; *Siegler*, 1996, 2000). A szociokulturális nézetek tanulmányozása alapján az emberek rugalmasan/adaptívan képesek váltani különböző számolási stratégiák között nem csak a feladat és saját egyéni jellemzőik függvényében, hanem a szociokulturális kontextus alapján is. Az eddigi gyér elméleti és empirikus szakirodalom nyomán Ellis (1997, 492.) megmutatta, hogy az életkor és a tapasztalat növekedésével a gyerekekben implicit tudás fejlődik ki arra vonatkozóan, hogy „egy adott kultúra mit tart megfelelőnek, adaptívnek és

bölcsnek”. Ez a tudás is befolyásolhatja explicit vagy implicit módon a stratégiaválasztást. Az osztálytermi helyzetek és pszichológiai kísérletek, „mivel ezeket a szituációkat egyaránt jellemzik társas és feladattal kapcsolatos célok” (*Ellis*, 1997, 508.), másképp kifejezve: egy „didaktikai egyezmény” (*Brousseau*, 1997) avagy „kísérleti egyezmény” (*Greer*, 1997) határozza meg őket, Ellis (1997) szerint hozzájárulhatnak a stratégiaválasztás megértéséhez. Különösen akkor szembeűnő ez, amikor a sebesség és pontosság szempontjából, vagyis a kognitív pszichológiai kutatás domináns szempontjai szerint, első látásra nem optimálisnak tűnő stratégiaválasztás történik. Vagyis az alsó tagozatos számtanban a gyerekek stratégiaválasztását részben az a társas-kulturális környezet határozza meg, amelyben a tanulók számot adnak számolási készségükről: például a sebesség és pontosság mellett vagy azok helyett olyan jellemzők tűnhetnek értékesnek az osztályteremben vagy a tudásról

Az alsó tagozatos számtanban a gyerekek stratégiaválasztását részben az a társas-kulturális környezet határozza meg, amelyben a tanulók számot adnak számolási készségükről: például a sebesség és pontosság mellett vagy azok helyett olyan jellemzők tűnhetnek értékesnek az osztályteremben vagy a tudásról számot adva, mint például a megoldási stratégia egyszerűsége, eleganciája, formalizáltsága, általános jellege, érthetősége, bizonyossága, eredetisége stb.

számot adva, mint például a megoldási stratégia egyszerűsége, eleganciája, formalizáltsága, általános jellege, érthetősége, bizonyossága, eredetisége stb. (lásd még *Ellis*, 1997; *Lave és Wenger*, 1991; *Rogoff*, 1990).

Rövid áttekintésünk alapján a következő definíciót vezetjük be arra vonatkozóan, hogy mit értünk az egyén stratégiaválasztásának adaptivitásán: Adaptívnek nevezzük egy stratégia választását, ha az egyén tudatosan vagy nem tudatosan azt a megoldási stratégiát választja, amely a legmegfelelőbb az adott feladat, a konkrét személy és az adott társadalmi-kulturális kontextus szempontjából. A „legmegfelelőbb stratégia” kifejezés alatt nem azt értjük, hogy „az a stratégia, amely a leggyorsabban a helyes válaszhoz vezet” (ahogyan szigorúan kognitív pszichológiai szempontból ezt jelenthetné), de azt sem zárjuk ki, hogy bizonyos értékelési helyzetben pontosan ezt jelentheti (lásd még *Ellis*, 1997; *Verschaffel és mtsai*, közlésre benyújtva).

A stratégiaválasztás rugalmasságának/adaptivitásának mérése

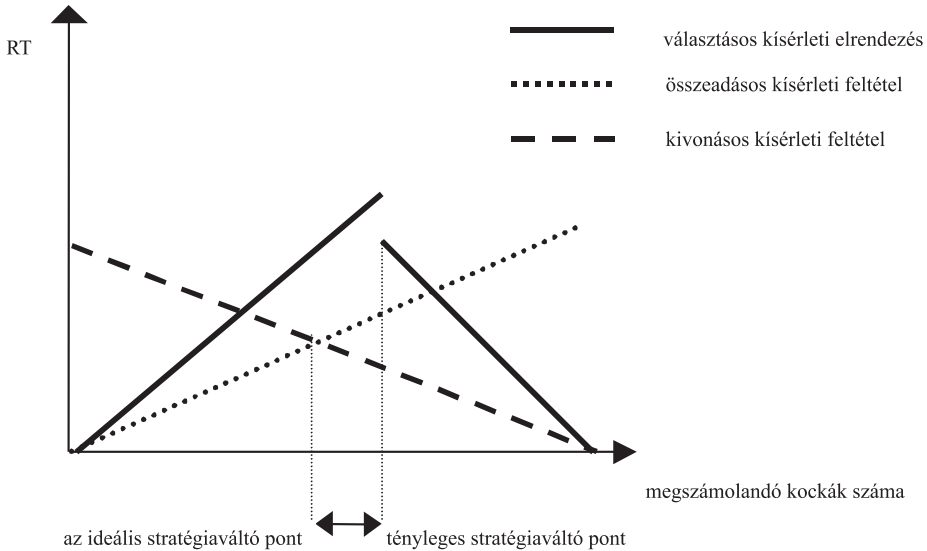
Amíg a stratégiaválasztás rugalmasságát kizárólag a feladatjellemzők alapján definiálták, a mérése egyszerű volt. De amint a stratégiaválasztás értelmezése a feladatjellemzők mellett az egyéni jellemzőket is magába foglalja, mint például a SCADS modellben, szükségessé válik e feltételezett komplexitás megjelenése a kutatási módszerekben. Egyre elterjedtebbé válik ilyen esetekre a választás/nem-választás (choice/no-choice) módszer (Siegler és Lemaire, 1997; lásd még Torbeyns, Arnaud és mtsai, 2004; Luwel, Torbeyns, Schillemans, Onghena és Verschaffel, közlésre benyújtva).

A választás/nem-választás módszert a kognitív pszichológiai paradigma keretein belül fejlesztették ki és alkalmazták. A módszer azt kívánja, hogy a vizsgált személyt kétfajta feltétel mellett teszteljük. Az egyik esetben a tanulók szabadon dönthetnek, hogy melyik stratégiát választják az egyes feladatokhoz. A másik esetben (nem-választás feltétel) mindegyik feladathoz ugyanazt a megoldási stratégiát kell használniuk. Ideális esetben ugyanannyi különböző nem-választás esetet vizsgálnak, mint ahányféle stratégia a választhatóság esetén elérhető. Azáltal, hogy a nem-választás feltétel mellett mindegyik feladatnál ugyanazt a stratégiát kell használni, a kutatónak lehetősége van torzítatlan becslést adnia az adott stratégia által biztosított sebességre és pontosságra – minden egyes vizsgált személy esetében. A nem-választás kísérleti feltétel esetén gyűjtött adatok alapján összehasonlítható a különböző stratégiák pontossága és sebessége azzal, amit a választható stratégiák kísérleti feltétel mellett nyertünk. Ezáltal a kutató az egyéni stratégiaválasztás adaptivitását a választható stratégia kísérleti feltétel mellett tudományosan, objektív módon tudja értékelni: Vajon a kísérleti személy – amikor megválaszthatja a megoldási stratégiát – a legjobb teljesítményt hozó stratégiát választja-e a sebesség és a pontosság szempontjából? A nem-választás kísérleti feltétel mellett nyert információ alapján lehet-e válaszolni erre a kérdésre?

A választás/nem-választás módszert sikeresen alkalmazták gyerekek és felnőttek stratégiaválasztásának értékelésére különböző matematikai területeken, köztük az egyszerű szorzás (Siegler és Lemaire, 1997) és egy lépésben megoldható összeadás és kivonás (Torbeyns, Verschaffel és Ghesquière, 2004, 2005), pénzváltás (Lemaire és Lecacheur, 2001), számolásos becsléses feladatok (Lemaire és Lecacheure, 2002) és számosságra vonatkozó döntés (Luwel, Verschaffel és Lemaire, 2005) esetén.

Ezek után röviden és példákkal alátámasztva kutatóközpontunk egyik vizsgálatát (Luwel és mtsai, 2005) tekintjük át, amelyben második és hatodik osztályos tanulókat és fiatal felnőtteket vizsgáltunk a fenti módszer alkalmazásával. A vizsgált személyeket arra kértük, hogy határozzák meg építőkockák (1-től 49-ig terjedő) számosságát, amely kockákat egy 7×7 -es rácson helyeztünk el. Egyik esetben a választás, másik esetben a nem-választás kísérleti módszerét alkalmaztuk. A választásos kísérleti feltétel mellett a vizsgált személyek szabadon választhattak két stratégia közül: választhatták az összeadásos stratégiát, amelyben az építőkockákat alcsoportokra osztották és mindegyik alcsoport becslült létszámát összegezték, de választhatták a kivonásos stratégiát is, amelyben az üres maradt helyek számát vonták ki a 7×7 -es rács darabszámából. A két nem-választásos kísérleti feltétel mellett az iménti két stratégiát kellett egymás után alkalmazni mindegyik feladatváltozatban. Az adaptivitás elemzéséhez kifejlesztettegy eljárást, amely minden feladatra és minden személyre meghatározza, hogy vajon a legadaptívabb stratégiát választotta-e: például azt a stratégiát, amely nem-választásos kísérleti helyzetben a leggyorsabban helyes eredményre vezetett. Egy adott személy esetén ennek becslése két dologból adódott. Egyrészt megállapították, hogy a választásos kísérleti helyzetben mennyi kocka esetén váltott át a kísérleti személy az összeadásos technikáról a kivonásosra. Másrészt megállapítható volt, hogy a nem-választásos stratégia esetén milyen számosság fölött vált a kivonásos stratégia hatékonyabbá. Luwel és mtsai kiszámították az abszolút különbsé-

get minden résztvevő esetén a tényleges, a szabad választás esetén megfigyelhető stratégiaváltó pont és a „kivetített” vagy ideális stratégiaváltó pont között. A két érték közül az elsőt az egyének válaszdő-mintázata alapján számolt regressziós modell adta, míg az utóbbi két illesztett regressziós egyenesből adódott, amelyeket a két nem-választásos feltétel mellett kapott kombinált válaszdő-mintázatokhoz illesztettek (1. ábra).



1. ábra. Az egyéni válaszdő (response-time, RT) a választásos és a nem-választásos feltételek mellett, valamint a tényleges és ideális stratégiaváltó-pontok különbségének sematikus ábrázolása (Forrás: Luwel és mtsai, 2005)

A tényleges és az ideális stratégiaváltó pontok közötti különbség az adaptivitás mértékének tekinthető: minél kisebb ez a távolság, annál adaptívabban választja ki az egyén a megoldási stratégiát szabad választás esetén, ahhoz viszonyítva, ahogyan a nem-választásos feltétel mellett kalibráltuk teljesítményét. Ezt a módszert alkalmazva Luwel és mtsai kimutatták, hogy az életkor növekedésével az emberek egyre adaptívabbak a stratégiaválasztásban.

Bár a választás/nem-választás módszer egyre gyakrabban használatos az emberek stratégia-adaptivitásának kutatására, mégsem tekinthetjük minden probléma nélkülinek. Módszerük egy nemrég megjelent áttekintésében Luwel és mtsai (közlésre benyújtva) a következő problémákat elemzik: (a) a választásos kísérleti elrendezésben a szabad választás helyett korlátozott vagy kényszerű stratégiaválasztás történt, (b) a választásos és nem-választásos feltételek mellett született eredmények összehasonlítását bonyolulttá teszi, hogy mindkét feltétel mellett szerepet kaphat a stratégiahasználat gátlása, a stratégiaválasztás és a stratégiaváltás, (c) a módszer az adaptivitás egyéni és csoportos mérésének összekombinálását teszi szükségessé, (d) a szélesebb társas vagy oktatási kontextus (amely kontextusban az embereknek kiválasztaniuk és használniuk kell a stratégiákat) hatással lehet arra, hogy milyen természetű stratégiai viselkedésről tudunk adatot gyűjteni. E legutóbbi változót mostanáig meglehetősen elhanyagolták a kognitív tudományi paradigmában. Nyilvánvaló, hogy éppen e legutóbbi kritika válik különösen relevánssá, amikor a stratégiahasználat rugalmasságát/adaptivitását társadalmi-kulturális szemszögből tekintjük. Ugyanakkor egyik kritika sem teszi érvénytelenné a módszert vagy azokat a kutatásokat, amelyekben használták, csupán a választás/nem-választás módszer és an-

nak alapfeltételei részletesebb kifejtésére és további finomítására van szükség. Szükség van továbbá annak megállapítására, hogy milyen tartalmi területeken és milyen alapkaszások esetén lehet a módszert bölcsen és sikeresen használni.

A stratégiahasználat rugalmasságának fejlesztése: mikortól és kiknek?

Amint azt korábban állítottuk, sok mai reform-alapú dokumentum és tananyag indul ki abból a feltételezésből, hogy a stratégiahasználat rugalmasságának fejlesztése lehetséges és pedagógiai szempontból értékes törekvés a fiatalabb és a matematikából gyöngébb tanulók számára is (Baroody és mtsai/Wilkins és Tiilikainen, 2003; Kilpatrick, Swafford és Findell, 2001; Verschaffel és mtsai, megjelenés alatt). Ugyanakkor túlságosan kevés alapos és szisztematikus kutatás történt, amely meggyőzően támogatná ezt az alapvetést (Geary, 2003; Verschaffel és mtsai, megjelenés alatt). A következőkben röviden összefoglaljuk azokat az érveket, amelyek az optimális életkorral és az optimális tanulóközön-séggel kapcsolatosak a stratégia-rugalmasság fejlesztése területén.

Elsőként a stratégia-rugalmasság fejlesztése optimális kezdőpontjának kérdését járjuk körül. Számos szerző érvel amellett, hogy először és mindenekelőtt egy adott számolási készség rutinszerű elsajátítását kell célul kitűzni, és azután érdemes módosítani a célt a rugalmas vagy adaptív stratégiák használata irányába. Ezt az érvet alátámasztja az a széles körben elterjedt meggyőződés, hogy ha nem kerülnek bele a hosszú távú memóriába tények, eljárások, modellek és reprezentációs eszközök [b1]. Ugyancsak emellett szól, hogy sok gyermeknek akkor sem sikerül rugalmas és/vagy automatikus gondolkodást elsajátítania, ha sok órán keresztül rendszeres oktatásban és akár külön foglalkozásokon vett részt (lásd például Geary, 2003; Milo és Ruijsenaars, 2002; Warner, Davis, Alcock és Coppola, 2002). A rugalmas stratégiahasználat korai fejlesztésére törekvés elleni érvet sokan ellenzik a matematikaoktatás reformjának hívei közül: szerintük az adaptivitás nem olyan dolog, ami egyszerűen megtörténik azt követően, hogy a tanulóknak kifejlődött a rutin egy adott területen. Ellenkezőleg: ezek a szerzők amellett érvelnek, hogy a rugalmas stratégiahasználatra nevelésnek meg kellene jelennie már a tanítási-tanulási folyamat legelején (lásd például Baroody, 2003; Gravemeijer, 1994; Selter, 1998; Wittmann és Müller, 1990-1992). Ezt az elvet szépen fejezi ki (bár sokkal általánosabb megfogalmazásban) a következő Bransford-idézet (2001, 3. o.):

„Nem fejlesztheted ki ezt egy »sarokkő-kurszus« keretében a középiskolás évek végén. Az adaptív gondolkodáshoz vezető út valószínűleg más, mint a rutinszerű gondolkodáshoz vezető út. Az adaptív gondolkodás magába foglal mentális szokásokat, attitűdöket, valamint olyan gondolkodási és tudásszerző utakat, amelyek különböznek a rutinszerű gondolkodástól, és időbe telik kifejlődésük. Nem azt akarom mondani, hogy »nem tudsz egy régi vágású rutinszerűen gondolkodónak új trükköket tanítani«. De valószínűleg nehezebb lesz ez, mint eleve az adaptív gondolkodás útján elindulni – legalábbis a legtöbb ember számára.”

Néhány szerző még tovább megy, és arra figyelmeztet, hogy a rutinszerű gondolkodás évekig tartó szorgalmas gyakorlása merevséghez vezethet. Feltovich, Spiro és Coulson (1997, 126. o.) szerint „vannak olyan hatások, amelyek együtt járnak az ilyen hosszán tartó gyakorlással, és amelyek a kognitív rugalmasság csökkenését okozhatják – a gondolkodás és a cselekvés viszonylagos merevségéhez vezethetnek (közben hatást gyakorolván más, kívánatosabb célokra, mit a hatékonyság és sebesség)”. Még ha a rugalmasság csökkenése növekedést okozhat a rutinszerű tapasztalatokban bizonyos területeken, nagyon veszélyesnek látszik olyan tanítási-tanulási környezetet tervezni, amelyben először csak a rutinszerű gondolkodás fejlesztésére törekszünk, későbbre halasztva a rugalmasság/adaptivitás fejlesztését addig a pillanatig, míg a rutinszerű szakértelem kialakul. Az alsó tagozatos matematikatanítás területére alkalmazva: ha kezdetben bizonyos feladattípusokra megtanított eljárások gördülékeny begyakorlására összpontosítunk, az

nemcsak haszontalan, hanem kifejezetten nemkívánatos eredményre vezet az adaptív gondolkodás szempontjából.

Szoros összefüggésben azzal, hogy mikortól törekedjünk a stratégia-rugalmasság/adaptivitás fejlesztésére, adódik a kérdés, hogy a rugalmas és adaptív stratégiák használatának előmozdítása vajon lehetséges és értékes-e a matematikai teljesítmény különböző szintjeihez kötődően, beleértve az átlagosan vagy gyengébben teljesítő tanulókat. Threlfall (2002, 40. o.) utal arra a gyakran hallott érvre, mely szerint „(mivel csak a ’matematikai elméjű’ gyerekek lesznek képesek megtanulni, hogyan válasszanak helyesen, [...] az ’átlagos’ és az ’átlag alatti’ tanulók esetében le kellene tenni a rugalmasságról mint célról”. Az érv, miszerint

Csak miután a kutatások meggyőzően és többszörösen kimutatják, hogy a reform-alapú megközelítésmód, amely szerint a változatos és rugalmas stratégiahasználat a kívánatos eredményekre vezet (miközben nem eredményez számottevő veszteséget a számítások pontossága és gyorsasága terén), lesznek a kutatók olyan helyzetben, hogy meggyőzzék az oktatáspolitikai döntéshozóit, a tanárokat és a szülőket. E meggyőzés arra kell irányuljon, hogy lehetséges és értékes dolog az adaptív gondolkodás fejlesztésére törekedni minden életkorú és képesség-szintű gyermek esetén, ahelyett, hogy az adaptív gondolkodásra mint valami „csúcsra” tekintենék, amely azok számára elérhető, akikben előbb a rutinszerű gondolkodás kialakult.

célszerűtlen a rugalmasság fejlesztéséért dolgozni ez utóbbi csoportok esetén, támogatásra talál a kognitív pszichológiai kutatásokban, amelyek dokumentálták a munkamemória alacsonyabb kapacitását az alacsony matematikai teljesítményt nyújtó gyermekekben. Néhány kutatásban arról számolnak be, hogy a matematikából gyengén teljesítő gyermekeknek általános nehézségeik vannak a megoldási stratégiák közötti váltással, amit mérni lehetett a standard kognitív feladatváltásos feladatokkal (cognitive shifting tasks) (Bull, Johnston és Roy, 1999; Bull és Scerif, 2001; Mclean és Hitch, 1999). Ez alapján a stratégiahasználat rugalmasságának fejlesztését célul kitűzni ezeknél a gyerekeknél célszerűtlen vagy akár veszélyes is lehet. Ezt az érvet támogatja számos fejlesztő program eredménye is (például Baxter, Woodward és Olson, 2001; Geary, 2003; Milo és Ruijsse-naars, 2002; Sowder, Philipp, Armstrong és Schappelle, 1998; Woodward és Baxter, 1997; Woodward, Monroe és Baxter, 2001), kimutatva, hogy különösen a matematikából gyengébben teljesítő gyerekek és/vagy az enyhén értelmi fogyatékos gyerekek többet profitálnak az olyan oktatásból, amely döntő vagy kizárólagos figyelmet fordít a hatékonyság (vagyis pontosság és gyorsaság) fejlesztésére, és amelyben a rugalmasság mint stratégiai jellemző csak másodlagos fontosságú. Azonban ezen eredményeknek és kö-

vetkeztetéseknek ellentmondanak azok a kutatások, amelyek szerint nem csak a matematikából rátermettek, hanem a gyengébben tanulók is többet profitálnak a reform-alapú oktatásból (amely hangsúlyos célként jelöli meg a stratégiák sokszínűségének és rugalmasságának fejlesztését), mint a hagyományos típusú „direkt” oktatásból (amely egy bizonyos stratégia kifejlesztését tűzi ki célul) (Baroody, 1996; Bottge, 1999; Bottge, Heinrichs, Chan és Serlin, 2001; Bottge, Heinrichs, Mehta és Hung, 2002; Cichon és Ellis, 2003; Klein, Beishuizen és Treffers, 1998; Menne, 2001; Moser Opitz, 2001; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Mivel meglehetősen nagy különbségek vannak a különböző vizsgálatok között (a) a vizsgált számtani feladatok és megoldási stratégiák, (b) az élet-

kori jellemzők és a vizsgálatba bevont tanulók jellemzői (főleg a matematikából gyengébben teljesítők bevonása szempontjából), (c) a fejlesztő program természete (milyen típusú stratégiahasználati rugalmasságot/adaptivitást fejleszt és milyen módon valósítja azt meg az oktatásban) és (d) a vizsgálat eredményességének mérése (a rugalmasság/adaptivitás mérése) szempontjából, az egymásnak ellentmondó eredmények és következtetések nem meglepőek és további kutatást tesznek szükségessé.

Figyelembe véve a tanulmányunkban elemzett elméleti kérdéseket úgy véljük, hogy ha a gyerekeknek olyan (csaknem algoritmikus) szabályt tanítunk, miszerint az egyes feladattípusokhoz megoldási stratégiák kapcsolhatók, és szisztematikusan fejlesztjük őket ennek a szabálynak gördülékeny alkalmazására (ahogyan az említett flamand Nieuwe Reken Raak módszer esetén történt), akkor nem azt a megközelítésmódot követjük, amely rugalmas és adaptív gondolkodáshoz vezet abban az értelemben, ahogyan mi definiáltuk azt. Ez a megközelítésmód, amelyben a rugalmasság fogalmát pusztán a feladatjellemzőkre építenénk, és nem vennénk figyelembe az egyéni és a kontextuális tényezőket, félrevezető értelmezést ad az „adaptivitás” fogalom lényegének. Valójában az adaptivitás magába foglalja a személyi és belátáson alapuló választást, amely különböző tényezők mérlegelésén alapul: nem csak a feladattal kapcsolatos, hanem az adott személyllyel és a kontextussal összefüggő tulajdonságokon is. Minél nagyobb mértékben túllépünk azon a stratégia rugalmasság-értelmezésen, amely jól meghatározott stratégiák feladatjellemzőkhöz kapcsolását jelenti (mint a Nieuwe Reken Raak), annál inkább egyet fogunk érteni abban, hogy nincs könnyű és egyenes útja az adaptív vá válásnak, és hogy az nem olyan dolog, amelyet képezni-tanítani lehet, hanem amit hosszú távon lehet művelni vagy előmozdítani. Világos, hogy amennyiben ez utóbbi álláspontot követjük, nagyobb kihívást jelent az adaptivitásra törekvés, különösképpen a fiatalabb és a matematikából gyengébben teljesítő tanulók körében. Hogy ez lehetséges és pedagógiai szempontból értékes cél-e, annak vizsgálata nyitva áll a további empirikus kutatások előtt.

Fontos, hogy további fejlesztő kísérletek folyjanak a rugalmasság fejlesztésére törekvő oktatás lehetőségéről és optimális formájáról, külön összepontosítva az ifjabb és a matematikából gyengébben teljesítő tanulóakra. Ha legfőbb oktatási célunk az lenne, hogy rövid távon a számolás területén minél többet elsajátítsanak a tanulók (minél gyorsabban és hibátlanul tudjanak ismerős összeadásos feladatokat megoldani), akkor hatékonyabb lehet minden számtani művelethez egyetlen stratégiát tanítani, amelyet a tanulók valamennyi adott típusú feladat esetén használnának. Esetleg olyan (csaknem algoritmikus) szabályt tanítani, miszerint a feladattípusokhoz megoldási stratégiák kapcsolhatók, és megtanítani ennek a szabálynak a rutinszerű alkalmazását, miközben eltekintünk a személyi és kontextuális jellemzőktől. H azonban az oktatási célokat szélesebb értelemben és hosszabb távon tekintjük, és a stratégiai rugalmasság alatt a matematikai fogalmak és alapelvek alapos megértését, a mintázatok felismerésének készségét, valamint megfelelő meggyőződések, attitűdök és érzelmek kialakulását értjük a matematika és a matematika tanítása-tanulása irányában, akkor más következtetésre jutunk. Ebben az esetben inkább a kevésbé a rutínra alapozó oktatás tűnik megfelelőnek a fiatalabb és matematikából gyengébb tanulók számára is. Vagyis az a kérdés, hogy milyen oktatási elképzelések a legjobbak a tanulók és különösen a matematikából nehézségekkel küszködők számára, nem tisztán empirikus probléma, hanem jelentős mértékben attól az értékrendszerrel függ, amelyek viszonyulásunkat a matematikai neveléshez meghatározzák. E kérdés etikai dimenziókat is érint: Igazságos-e az, ha a hagyományos kritériumok szerint átlagosnak vagy gyengébb képességűnek bizonyuló tanulók olyan matematikaoktatásban részesülnek, amelyek intellektuális szempontból kevésbé izgalmasak (Greer, személyes közlés)?

Következtetés

Ebben a tanulmányban az ellen érveltünk, hogy minden életkorú és minden képességszintű gyerek számára az lenne a legértékesebb oktatás, amelyben a gyerekek állandó sulykolást (drill) és gyakorlást kapnak azért, hogy csaknem algoritmikus technikát tanuljanak a leghatékonyabb eljárás kiválasztására, amellyel adott feladattípus megoldható. Ehelyett mi azt az oktatási megközelítésmódot támogatjuk, amelyben elősegítjük, hogy a gyerekekben kialakuljanak saját preferenciáik, amikor is a stratégia választása a feladat, az egyén és a kontextus jellemzőire reflektálva fejlődik. Tudomásul vesszük ugyanakkor, hogy ez az ambiciózus szándék, amellyel az adaptív gondolkodás fejlesztésére és az ahhoz vezető optimális út leírására törekszünk, még túlságosan „retorikai” természetű: inkább anekdotikus bizonyítékainak vannak, túl kevés meggyőző adat származik empirikus kutatásból. Ha előbbre szeretnénk jutni a jelenség elméleti megértésében és a stratégiai rugalmasság gyakorlati fejlesztésében a matematikából gyengén teljesítő gyerekek elemi aritmetikájának területén, nagy szükség van további folyamatos kutatói erőfeszítésekre, különösen a többféle képességszintű gyerekeket magában foglaló kísérletek tervezésében.

Csak miután a kutatások meggyőzően és többszörösen kimutatják, hogy a reform-alapú megközelítésmód, amely szerint a változatos és rugalmas stratégiahasználat a kívánatos eredményekre vezet (miközben nem eredményez számottevő veszteséget a számításkor pontossága és gyorsasága terén), lesznek a kutatók olyan helyzetben, hogy meggyőzőek az oktatáspolitikai döntéshozói, a tanárokat és a szülőket. E meggyőzés arra kell irányuljon, hogy lehetséges és értékes dolog az adaptív gondolkodás fejlesztésére törekedni minden életkorú és képességszintű gyermek esetén, ahelyett, hogy az adaptív gondolkodásra mint valami „csúcsra” tekintenénk, amely azok számára elérhető, akikben előbb a rutinszerű gondolkodás kialakult.

Jegyzet

(1) Az egyszerűség kedvéért egymás szinonimáiként használjuk a rugalmasság és adaptivitás fogalmát, amint azt máshol kifejtettük (Verschaffel, Torbeyns és Van Dooren, közlésre benyújtva), bár néhány szerző (csekély) különbséget tesz közöttük.

(2) A 1010 („tíz-tíz”) eljárás azt jelenti, hogy levágjuk a tízeseket mindkét egész számban, és külön kezeljük azokat (pl. $47+15=$; $40+10=50$; $7+5=12$; $50+12=62$). Ezzel szemben a G10 eljárás alkalmazása azt kívánja a gyerektől, hogy a második szám tízeseit és egyesit az egészében megtartott első számhoz adja hozzá (vagy vonja ki belőle) (pl. $47+15=$; $47+10=57$; $57+5=62$).

(3) Az ilyen elemzésben számos tanuló által megoldott különböző típusú feladatok adatainak

empirikus elemzése és a feladatjellemzők tisztán elméleti vizsgálata valósul meg, vagy a kétféle elemzés kombinációja.

(4) Valójában a választás mechanizmusa ennél kissé kifinomultabb, mivel a rendszer díjazza az újonnan felfedezett stratégiák „újdonságértékét”, amely növeli annak esélyét, hogy egy új stratégiát próbálj használni a következőkben (függetlenül annak sebességétől és pontosságától). Ezt úgy interpretálhatjuk, mint a kontextus számítógépes modellbe építésének (első) kísérletét.

Irodalom

Baroody, A. J. (1996): An investigative approach to the mathematics instruction of children classified as learning disabled. In Reid, D. K. – Hresko W. P. – mtsaik (szerk.): *Cognitive approaches to learning disabilities (third edition)*. PRO-ED, Austin. 545–615.

Baroody, A. J. (2003): The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In Baroody, A. J. –

Dowker, A. (szerk.): *The development of arithmetic concepts and skills*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah. 1–34.

Baroody, A. J. – Wilkins, J. L. M. – Tiilikainen, S. H. (2003): The development of children’s understanding of additive commutativity: From protoquantitative concept to general concept? In Baroody, A. J. – Dowker, A. (szerk.): *The development of arithmetic*

- concepts and skills*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah. 127–160.
- Baxter, J. A. – Woodward, J. – Olson, D. (2001): Effects of reform-based mathematics instruction on low achievers in five third-grade classrooms. *Elementary School Journal*, 101. 529–547.
- Blöte, A. W. – Van der Burg, E. – Klein, A. S. (2001): Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, 93. 627–638.
- Bottge, B. A. (1999): Effects of contextualized math instruction on problem solving of average and below-average achieving students. *The Journal of Special Education*, 33. 81–92.
- Bottge, B. A. – Heinrichs, M., Chan, S. – Serlin, R. C. (2001): Anchoring adolescents' understanding of math concepts in rich problem solving environments. *Remedial and Special Education*, 22. 299–314.
- Bottge, B. A. – Heinrichs, M. – Mehta, Z. – Hung, Y. (2002): Weighing the benefits of anchored math instruction for students with disabilities in general education classes. *The Journal of Special Education*, 35. 186–200.
- Bourdeaud'hui, G. – Caymax, J. – Deboysier, G. – Haepers, F. – Jacobs, H. – Matthys, L. – Melis, J., Scheurweghs, M. – Van den Eynde, R. – Van der Avert, A. – Vandeweyer, W. – Verlinden, S. – Westerland, W. – Wiecke, C. (2002): *Nieuwe Reken Raak. Invalboek 1*. Wolters, Leuven.
- Bransford, J. (2001): *Thoughts on adaptive expertise*. Kézirat. <http://www.vanht.org/docs/AdaptiveExpertise.pdf>
- Brousseau, G. (1997): *Theory of didactical situations in mathematics*. Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. – Warfield, V. (szerk. és ford.). Kluwer, Dordrecht.
- Brownell, W. A. (1945): When is arithmetic meaningful? *Journal of Educational Research*, 38. 481–498.
- Bull, R., Johnston, R. S. és Roy, J. A. (1999): Exploring the roles of the visual-spatial sketch pad and central executive in children's arithmetical skills: Views from cognition and developmental neuropsychology. *Developmental Neuropsychology*, 15. 421–442.
- Cichon, D. – Ellis, J. G. (2003): The effects of MATH Connections on student achievement, confidence, and perception. In Senk, S. L. és Thompson, D. R. (szerk.): *Standards-based school mathematics curricula: What are they? What do students learn?* Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah. 345–374.
- Department for Education and Employment (1999): *The National Numeracy Strategy Framework for Teaching Mathematics from Reception to Year 6*. Department for Education and Employment, London.
- Ellis, S. (1997): Strategy choice in sociocultural context. *Developmental Review*, 17. 490–524.
- Feltovich, P. J. – Spiro, R. J. – Coulson, R. L. (1997): Issues of expert flexibility in contexts characterized by complexity and change. In Feltovich, P. J. – Ford, K. M. – Hoffman, R. R. (szerk.): *Expertise in context: Human and machine*. AAAI Press, Menlo Park. 125–146.
- Freudenthal, H. (1991): *Revisiting mathematics education*. Reidel, Dordrecht.
- Geary, D. C. (2003): Arithmetical development: Commentary on Chapters 9 through 15 and future directions. In Baroody, A. J. – Dowker, A. (szerk.): *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah. 453–464.
- Gray, E. – Pitta, D. – Tall, D. (1997): The nature of the object as an integral component of numerical processes. In: Pehkonen, E. (szerk.): *Proceedings of the 21st PME International Conference*, 1. 115–130.
- Gravemeijer, K. (1994): *Developing realistic mathematics education*. Freudenthal Institute, University of Utrecht, Utrecht.
- Greer, B. (1997): Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, 7. 293–307.
- Heirdsfield, A. M., – Cooper, T. J. (2002): Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies. *Journal of Mathematical Behavior*, 21. 57–74.
- Kilpatrick, J. – Swafford, J. – Findell, B. (2001): *Adding it up. Helping children learn mathematics*. National Academy Press, Washington, D.C..
- Klein, A. S. – Beishuizen, M. – Treffers, A. (1998): The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29. 443–464.
- Lave, J. – Wenger, E. (1991): *Situated learning: Legitimate, peripheral participation*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lemaire, P. – Siegler, R. S. (1995): Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal for Experimental Psychology: General*, 124. 83–97.
- Luwel, K. – Torbeyns, J. – Schillemans, V., Onghena, P. – Verschaffel, L. (közlésre benyújtva: Promises and pitfalls of the choice/no-choice method in research on strategy choice and strategy change. Kézirat.
- Menne, J. J. M. (2001): *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getalengebied tot 100 – een onderwijsexperiment*. [A productive training program for mathematically weak children in the number domain up to 100 – a design study]. CD-beta Press, Utrecht.
- Milo, B. – Ruijsenaars, A. J. J. M. (2002): Strategiegebruik van leerlingen in het speciaal basisonderwijs: begeleiden of sturen? [Strategy instruction in special education: Guided or direct instruction?] *Pedagogische Studiën*, 79. 117–129.
- Moser Opitz, E. (2001): Mathematical knowledge and progress in the mathematical learning of children with special needs in their first year of school. In: *MATHE 2000. Selected papers*. University of Dortmund, Department of Mathematics, Dortmund. 85–88.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989): *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

- National Council of Teachers of Mathematics (2000): *Principles and standards for school mathematics*. <http://standards.nctm.org/document/index.htm>
- Ontwikkelingsdoelen en eindtermen. Informatiemap voor de onderwijspraktijk. Gewoon basisonderwijs (1998). [Standards. Documentation for practitioners. Elementary education.] Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, Departement Onderwijs, Afdeling Informatie en Documentatie, Brussel.
- Rogoff, B. (1990): *Apprenticeship in thinking*. Oxford University Press, New York.
- Selter, C. (1998): Building on children's mathematics. A teaching experiment in grade three. *Educational Studies in Mathematics*, 36. 1–27.
- Shrager, J. – Siegler, R. S. (1998): SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science*, 9. 405–410.
- Siegler, R. S. (1996): *Emerging minds: the process of change in children's thinking*. Oxford University Press, Oxford.
- Siegler, R. S. (2000): The rebirth of children's learning. *Child Development*, 71. 26–35.
- Siegler, R. S. – Lemaire, P. (1997): Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126. 71–92.
- Sowder, J. – Philipp, R. – Armstrong, B. – Schappelle, B. (1998): *Middle-grade teachers' mathematical knowledge and its relationship to instruction*. SUNY, Albany.
- Thompson, I. (1999): Getting your head around mental calculation. In: Thompson, I. (szerk.): *Issues in teaching numeracy in primary schools*. Open University Press, Buckingham. 145–156.
- Threlfall, J. (2002): Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50. 29–47.
- Torbeyns, J. – Arnaud, L. – Lemaire, P. – Verschaffel, L. (2004a): Cognitive change as strategic change. In Demetriou, A. és Raftopoulos, A. (szerk.): *Cognitive developmental change: theories, models and measurement*. Cambridge University Press, Cambridge. 186–216.
- Torbeyns, J. – Verschaffel, L. – Ghesquière, P. (2004b): Strategy development in children with mathematical disabilities: Insights from the choice/no-choice method and the chronological-age/ability-level-match design. *Journal of Learning Disabilities*, 37. 119–131.
- Torbeyns, J. – Verschaffel, L. – Ghesquière, P. (2005): Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction*, 23. 1–21.
- Treffers, A. – De Moor, E. – Feijs, E. (1990): *Proeve van een nationale programma voor het reken/wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1. Overzicht eindoelen*. [Towards a national curriculum for mathematics education in the elementary school. part 1. Overview of the goals.] Zwijssen, Tilburg.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001, szerk.): *Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Wolters Noordhoff, Groningen.
- Van der Heijden, M. K. (1993): *Consistentie van aanpakgedrag*. [Consistency in solution behavior.] Swets & Zeitlinger, Lisse.
- Verschaffel, L. – Greer, B. – De Corte, E. (megjelenés alatt): Whole number concepts and operations. In: Lester, F. (szerk.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning (second version)*. MacMillan, New York.
- Verschaffel, L. – Luwel, K. – Torbeyns, J. – Van Dooren, W. (közlésre benyújtva). *Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education*. Kézirat.
- Warner, L. B. – Davis, G. E. – Alcock, L. J. – Coppolo, J. (2002): Flexible mathematical thinking and multiple representations in middle school mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1. 2. sz. 37–61.
- Wittmann, E. Ch. – Müller, G. N. (1990–1992): *Handbuch produktiver rechenübungen. Vols 1 & 2* [Handbook of productive arithmetic exercises. Volume 1 & 2]. Klett Verlag, Düsseldorf und Stuttgart.
- Woodward, J. és Baxter, J. (1997): The effects of an innovative approach to mathematics on academically low achieving students in inclusive settings. *Exceptional Children*, 63. 3. sz. 373–388.
- Woodward, J. – Monroe, K. – Baxter, J. (2001): Enhancing student achievement on performance assessments in mathematics. *Learning Disabilities Quarterly*, 24. 4. sz. 33–46.
- Yackel, E. – Cobb, P. (1996): Classroom sociomathematical norms and intellectual autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27. 458–477.

Fordítás: Choma Dávid