ACTA UNIVERSITATIS LITTERARUM REGIAE HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE KOLOZSVÁRIENSIS ANNI MCMII—III.

FASCICULUS II.

BOLYAI JÁNOS

SZÜLETÉSÉNEK SZÁZADIK ÉVFORDULÓJA ALKALMÁBÓL A KOLOZSVÁRI M. KIR. FERENCZ JÓZSEF TUDOMÁNYEGYETEM ÁLTAL

1903 JANUÁRIUS 15-IKÉN RENDEZETT

EMLÉKÜNNEP.

KOLOZSVÁR,

AJTAI K. ALBERT MAGYAR POLGÁR KÖNYVNYOMDÁJA.

1903.

I.

Az egyetemi tanács 1902 november 3-ikán tartott ülésében a mathematikai és természettudományi kar javaslatára lelkesedéssel határozta el, hogy Bolyai Jánosnak születése századik évfordulójára ünnepet szentel és pedig 1903. január hó 15-ikén, tekintettel arra, hogy a távolból meghivandó vendégeinkre nézve nehézséggel járt volna deczember hó közepén, mikorra a nagy mathematikusnak születési évfordulója esett, odahagyni az ezen időtájban rendszerint túlhalmozott hivatalos teendőiket. Emlékbeszéd tartására dr. Schlesinger Lajost, a felsőbb mennyiségtan ny. r. tanárát kérte föl, magának az ünnepnek a rendezésére pedig dr. Szabó Dénesnek, az orvosi kar prodékánjának elnöklete alatt dr. Farkas Gyulát a mathematikai és természettudományi kar dékánját, valamint dr. Apáthy Istvánt, ugyanezen kar prodékánját. E három tagú bizottság a tanács egyetértésével fölvette még kebelébe dr. Schlesinger Lajost.

A kitűzött napon d. e. 10 órára az egyetem aulája egészen megtelvén a tudományos intézetek és társulatok küldötteivel, városunk hivatali és értelmi kitünőségeivel, díszes hölgyközönséggel és ifjúsággal: a tanács és a tanári kar is bevonúlt a szokásos módon.

Először az egyetemi ifjusági dalegyesület énekelte zenekiséret mellett a XIII, »Vajh meddig fogod feledni oh nagy isten gyermeked? kezdetű zsoltárt. (Kersch F.)

Az ének elhangzása után dr. Schilling Lajos, az egyetemes történelem ny. r. tanára, e. i. rector, a következő beszéddel nyitotta meg az ünnepet.

Tekintetes Egyetemi Közgyűlés!
Mélyen tisztelt Közönség!

1802 deczember 15-ikén parányi csillag gyúlt ki városunk láthatárán, hogy rövid pályafutás alatt hazai kulturánk, az egyetemes tudomány egén mint elsőrangú fényesség tündököljön; hogy bevilágítson oda, hova emberi szem még nem tekintett. Bolyai János föltárta ama rejtelmeket, a melyek 2000 éven át annyi fényes tehetséget sodortak útvesztőbe.

Lángelméjével szemben megdöbbent a gondolat, hogy emlékünnepén csekélységem adjon először hangot dicsőségének. De megnyugtat egy kép, a mely lelkemben fölmerűl. Ki tudná megmondani, hogy a szélvész, a mely a hegyek közűl indúl tova, a következő perczben a völgy hatalmas tölgyének legszebb lombját-e, vagy talán legigénytelenebb levélkéjét fogja a magasba ragadni? A sorstól függ, de legyen bármiként, mindenképen a természet erejét fogjuk a jelenségben csodálni. A véletlen hozott engem is ama fényes csillag tündöklő útjába, de ajkamon egy tudomány-egyetem elismerésének és hálájának első accordja hangzik el.

Igen, a tudományok egyeteme fon homlokára koszorút annak, ki mig az egész világra kihatót akart és cselekedett, addig maga közönytől kisérve élt s majd elhagyottan hunyta le szemeit. A mathematikai és természettudományi kar indítványára készséggel határozta el egyetemi tanácsunk a mai emlékünnepet, mely hogy im valóban méltó lett a nagy tudóshoz, e díszes közönség megjelenésének köszönhetjük.

Örömmel üdvözlöm hát mélyen tisztelt vendégeinket és első sorban azokat, a kik a távolból jőve, hozák meg áldozatukat. Üdvözlöm a Magyar Tudományos Akadémia, a budapesti tudomány-egyetem, valamint ennek bölcsészeti kara, a budapesti József-műegyetem, a bécsi cs. és kir. műszaki katonai Akadémia, a marosvásárhelyi ref. főgymnasium képviselőit, az orsz. középiskolai tanáregyesület és nagyenyedi Bethlen-collegium küldötteit, valamint azokat az egyeseket, a kiket kisebb-nagyobb távolból hozott ide kegyeletes érzésük.

Fogadják egyetemünk hálás köszönetét! Részvételükkel átalános jellegűvé tették ünnepünket, a milyen magának az ünnepeltnek a hatása is.

Városunkat egykor bőven folyó földi javaiért kincses Kolozsvárnak nevezték el. A javak eltüntek, de még hangoztatják a nevet s az idegen kétkedve kutat értelme után. Ne szégyenkezzünk! Negyedévvel előbb egy másik nagy szülöttének, Mátyás királyunknak rendezett e város országos ünnepet. Az is, ez is az egyetemes mivelődéstörténet lapjaira jegyezte föl a nevét elévűlhetetlen betűkkel. E nagy szellemek emléke a legközelebbről a miénk, birtokukban gazdagok vagyunk: ápolva azt, önlelkünk is gazdagon megtermékenyűl.

De némelyek megdöbbenve állanak a problema előtt, a melyet Te benned, kinek emlékét ünnepeljük ma, a lángész és ember ellentéte támaszt. Ne feledjék, hogy minél erősebben tűz földünkre a nap sugara, annál hamarabb borítják arczulatát, köd, pára, fellegek — és gyarló szemünk csak ezeket látja, holott a fellegek fölött a nap csak oly fényes, ragyogó! Az ő ízzó lelke is maga körűl vihart vetett — ki tudja minő lelki fájdalmak, vívódások között! de ne ezt nézze a mi szemünk, csak lelkének fényét, a mely túl a viharon, homályon, nagyot alkotott s a mely ifjúsága megoldott problemája után egy másik elé állította: megnyitni az emberiség előtt az egyetemes erény s ez által az egyetemes boldogság útait. E czéltól már messze elmaradt. Szörnyű tragoedia! Ki az emberiség javáért lángolt, környezetében félreismerést vélt látni csupán!

De az idő beteljesült: az ő szülőföldén épült s az ő tanait fennállása óta méltató tudomány-egyetemünk tagját, dr. Schlesinger Lajos kartárs urat, a felső mennyiségtan ny. r. tanárát im fölkérhetem, hogy áldozzon hozzá méltóan emlékének!

II.

EMLÉKBESZÉD

tartotta

Schlesinger Lajos

bölcsészetdoktor, a felsőbb mennyiségtan ny. r. tanára, a Magyar Tudományos Akademia levelező tagja stb.

Nagytekintetü Gyülekezet !

Ez a terem, az auditorium maximum, a melyben a mindennapi rendes munkájában külön szakokra tagolt tudomány-egyetem időnként összegyűl, hogy ünnepeit ülje, a történelemnek van szentelve. A nemzet, az egyetem, a tudomány története az a közös talaj, a melyen alkalom adtán találkozunk, hogy a multba visszapillantva, a jelen feladatait megérteni és a jövő kérdéseit megfogalmazni tanuljuk. A mai nap egy férfiu történelmének jelében áll; *Bolyai* János az a férfiú, a kinek emlékét ünnepelni készülünk, *Bolyai* János, ki száz esztendővel ezelőtt városunkban erre a világra született és kinek nevét a tudomány történelme az ókor legnagyobb geometrájának, *Euklides*-nek neve mellé jegyzi fel lapjain, jóllehet, hogy attól az időtől fogva, a midőn *Euklides* a Στοιχεῖα-ban a görög geometria rendszerét felépítette, addig az időig, a midőn *Bolyai* János az Appendixben a térnek absolute igaz tudományát megalapította, csaknem kétezer év telt el.

Az 1796-ik év végén Göttingen hires egyetemén két ifjú ismerkedett meg egymással, kik nemsokára az igazság zászlaja alatt testvéri frigyet kötnek;[1] az idősebb, tűzes lelkű, közlékeny magyar, a csak két esztendővel fiatalabb csendes elmélkedésbe mélyedt német, ki[2] soha előre nem szól, még kész dolgokról is hallgat. E két ifjú *Bolyai* Farkas volt Erdélyből és *Gauss* Carl Friedrich Braunschweigból. Minden este találkoznak, gyakran a mathematika alapjairól [3] vitatkoznak, a geometria foltja,[4] a parallelák axiomája, is szóba kerül;[5] mindegyikük fogadva ad és adva fogad, mert, a mint *Bolyai* Farkas írja, »az elemekben *Gauss* akkor kevésbbé biztos volt, mint én a magam erejéből, de neki a felsőbb számítások, a melyekről nekem még fogalmam sem volt, már gyermekjáték voltak«. Egynehány boldog, a mint *Bolyai* mondja,[7] »földöntúli rajongásban, az egyedüli Uránia oltára előtt töltött esztendő« után, szétválnak a két barát útjai; az egyik »a dicsőség templomába kerül«,[8] a másik visszatér félreeső magányos hazájába, mint egész életén át hiven őrzött drága kincset magával vive annak a barátságát, a kiben ő már akkor Európa jövendőbeli legelső mathematikusát látta és megjövendölte [9] és kinek emberi tökélyében minden alkalommal föltétlenül bizott.

Kolozsvárra visszatérve, egy bálon ismerkedik meg *Bolyai* Farkas *Benkö* József borbély leányával, *Zsuzsánná*-val, a mint *Gauss*-nak írja,[10] »egy igen vonzó, finom szellemű leánynyal«, kivel 1801 szept. 28-án meg is esküszik. 1802 deczember 15-én a fiatal házaspárnak Kolozsvárt a nő szüleinek házában fiúk születik, kit deczember 21-én János névre kereszteltetnek; a boldog atya leírása szerint [11] »egészséges, igen szép gyermek, finom vonásokkal, fekete *hajjal és szemöldökkel és égő sötétkék szemekkel, melyek néha úgy fénylenek, mint két drágakő*«.

Ezek a szemek voltak hivatva, a geometria rejtélyeibe oly mélyen belepillantani, mint emberi lény szemei ő előttük soha.

Rendkivűl boldogan folynak a fiatal János első évei Domáldon, az atyai birtokon; a gyakran házi gondoktól és kellemetlen rokonsági viszonyoktól megzavart családi élet az imádott fiú körűl, mint egy világot és vidámságot sugárzó nap körűl forog.[12] 1804-ben a család átköltözik Marosvásárhelyre, a hová *Bolyai* Farkas az ev. ref. collegiumhoz mint a mathesis és physika professora hivatott meg és az ottani szerény kis tiszti lakásban leste az atya, mint *Bedőházy* úr mondja,[13] János fiának csodálatosan fejlődő elméjét. Ugyanis csakhamar, már a gyermek-játékokban, nyilatkozik a fiúnak rendkivűli mathematikai tehetsége;[14] de bölcs előrelátással gondoskodik az atya fia testének ápolásáról és fejlesztéséről[15] és vigyázva vigyáz, nehogy e sarjadzó talentumot csodagyermekké torzítsa el. Csak a 9-ik esztendőben kezdi a rendszeres tanítást,[16] de akkor már csakugyan nem mindennapi tanítványnak megfelelő módon, mindjárt *Euklides*-szel és *Euler*-rel. Valószínű, hogy már ebben az időben beleültette a gyermek lelkébe azokat a csirákat, a melyekből későbben az Appendix mint felséges érett gyümölcs jött napvilágra, mert kétségtelen,[17] hogy *Farkas* tanulásra vágyó fiát a parallelák elméletében levő hézagra is figyelmeztette, e hézagra, mely őt magát szakadatlanúl foglalkoztatta. Tizenhárom éves korában a fiatal *János* már a differentiális és integrális calculusban járatos, szereti, a mint atyja *Gauss*-nak írja,[18] a mély elméleteket.

De atyja a legnagyobb gondot fordítja arra is, hogy *János* kiképeztetése egyoldaluvá ne váljék. *János* kifejezett zenészeti képessége gondos művelésben részesűl, és egyik főgondja *Farkas*-nak,[19] hogy fia a szabályos iskolai tanfolyamon átmenjen. Az eredmény minden tekintetben kitünő: *János* excellens hegedüs lesz, és Róma örök nyelvét, mely akkor az iskolai oktatásban még vitatlanul elfoglalja az őt megillető központi helyet, úgy sajátítja el, hogy azt egész életén át mesterileg kezeli; 1817 junius havában leteszi a Rigorosumot.

Az életpálya választása a fiú természeti képessége és a mathesishez való hajlam által, melyben apa és fiú találkoznak, magától adódik; *Farkas* fiát, a mint maga mondja[20] »a mathesisnek szentelte áldozatúl«, mihez *János* maga is örömest hozzájárul és mi természetesebb, mint az, hogy *Farkas* ekkor arra a gondolatra jön, hogy fiát *Gauss* barátjához küldje, ki akkor már dicsőségének a tetőpontján állva, Göttingenben tanított. Éveken át ápolja *Farkas* ezt a tervet,[21] és *János*, ki atyjának *Gauss* iránt való határtalan tisztelete[22] és talán egyik-másik *Gauss*-féle dolgozat olvasása folytán e nagy férfiúra, mint egy magasabb lényre tekintett fel, maga is csak *Gauss*-hoz kivánkozik.[23] *Farkas* a terv anyagi oldalát is fontolóra veszi, egyáltalában még költészeti munkái között is folytonosan ezzel az ő kedvencz tervével foglalkozik,[24] gróf *Kendeffi* Ádám megigéri a segélyét[25] és végre, bár *Gauss* már nyolcz éve, hogy utolsó levelére nem válaszolt, *Farkas* megteszi a döntő lépést, a mennyiben 1816 április 10-én kelt levelében[26] közli *Gauss*-al kedvencz tervét, a mely tervre különben már kilencz esztendővel előbb, mikor *János* még gyermek volt, reá mutatott volt.

Mily izgalommal várhatott apa és fiú *Gauss* válaszára, erre a válaszra, a mely a fiú jövője felett döntést volt hozandó; de hónapok és esztendők multak és a várva várt levél Göttingenből örökre elmaradt.

A mint már *Bedőházy* úr megjegyzi,[28] némelyek szemére vetették *Gauss*-nak, hogy régi barátjának a levelét még elutasító válaszra sem méltatta. De azon már magukban döntő okokhoz, a melyekkel *Bedőházy* úr maga *Gauss* magatartását indokolja, most, a mikor *Bolyai* Farkas *Gauss*-hoz intézett levelének teljes szövege előttünk fekszik, még hozzátehető az is, hogy nem annyira *Gauss*-nak a magatartásán, mint inkább azon, már a naivságon is túlmenő módon kell csodálkoznunk, a melylyel *Farkas* saját tervének pro és contráját *Gauss* családjának bevonásával[29] tárgyalja. Mindenesetre bele kell nyugodnunk abba a ténybe, hogy az a szép terv, mely *János* mathematikai geniusát a leghivatottabb alkotónak a kezébe adta volna, meghiusúlt.

Tehát másra kellett gondolniok; elhatározták, hogy *János* a katonai pályára megy, arra a pályára, a mely iránt *Farkas* ifjúságában maga is előszeretettel viseltetett.[30] És 1818[31] szeptember havában *Jánost* már a bécsi cs. k. mérnöki akadémiában látjuk, a hol 1822-ig marad.

János elválása a szülei háztól anyjára nézve a legszomorúbb következményekkel járt.[32] Ez a bár nagyon hystericus, de nem mindennapi asszony annál nagyobb gyöngédséggel ragaszkodik egyetlen fiához, minél mélyebbre megy az elidegenedés közte és férje között. Bámulatos előrelátással, de saját énjét fia boldogságának alárendelve, azt mondja *János*-ról, hogy[33] »itthon ne maradjon, de ha elmegy meg fogok őrülni«. És sajnos, úgy is lett. *János* bucsúja az anyjától egész életre szóló búcsú volt; a boldogtalan nő szelleme mindinkább elsötétedik, mig 1821 szeptember 10-én négy reá, valamint környezetére nézve kinos esztendő után meghal, a nélkül, hogy fiát viszontláthatta volna. De a szülői háztól való elválással *János* boldog ifjúságának is vége szakadt és megkezdődik életsorsa, mely a világosság és homály rideg váltakozásával az emberiség egyik legmeghatóbb tragédiája.

Az első évekről, melyeket *János* a katonai akadémián töltött, kevés adat áll rendelkezésre, *Farkas* levelei *Bodor* Pál barátjához, melyek az 1818—22. évekből valók, ugyan elég gyakran emlegetik *János* nevét, de inkább külső viszonyokkal kapcsolatban; az anyának *János*-on való búja,[34] *János*-nak haladása a rajzolásban,[35] pénzügyi nehézségek,[36] melyeken gróf *Kendeffi* Ádám segíteni akar, de *János*-nak kitűnő előmenetele is [37] említvék.

Azonban *János* önéletrajzi feljegyzéseiből és különösen két levélből, melyekről később még szólanunk kell, kitetszik, hogy *János* az akadémián való tartózkodása idejében a parallelák elméletét kedvencz foglalkozásává teszi.[38]

Láttuk, hogy a parallelák elmélete már *János* tudományos nevelésének első kezdetében szerepel; szakadatlanúl foglalkoztatja ez a tárgy az apját, és ha *Farkas* látva, hogy erőlködő fáradozásai sikertelenek maradnak, majdnem kétségbeesve költői vagy gyakorlati foglalkozásban keres menedéket,[39] mégis újból és újból erre, a mint nevezi, »zsarnoki eszmére« tér vissza.

Könnyen érthető, hogy annak a férfiunak az eszmeiránya, ki *János*-nak atya és tanító volt egy személyben, *János* szellemi fejlődésére döntő befolyást gyakorolt; *János*-nál ismereteinek a bővitésével az atyja kezdetben talán teljesen meg sem értett szavai fogalmakká alakulnak és a parallelák elméletében levő hézag kitöltése az emberi tudás legfelsőbb, legfontosabb feladata gyanánt tündöklik szeme előtt. Azzal az eltökélt szándékkal hagyja ott a szülei házat, hogy ezt a czélt vagy eléri, vagy elbukik, és még az atya megható intése, melylyel ez egy emlékezetes 1820-ból származó levelében[40] fiát ezen fenektelen éjszakán való áthaladástól elijeszteni igyekszik, *János*-nak azt a vágyát, hogy minden áron ezen a sziklán áttörjön, nemcsak, hogy nem csökkenti, hanem mindinkább fokozza.

Önként felmerűl előttünk az a kérdés, hogy vajjon tényleg oly fenséges-e ez a czél, mely után itt küzdenek, vajjon örüljünk-e annak, vagy pedig sajnáljuk-e, hogy *János*-nak nagy tehetségét a sors és a nevelés egész rendszerességgel arra a pályára sodorta, a mely ezen czél elérésére vezetett? A felelet erre a kérdésre nem könnyü, de ma már kétes nem lehet. A mint oly gyakran a tudományban, úgy ebben az esetben is az eredeti czél elérésére nem az egyedüli, de nem is a legértékesebb termés, mely annak integet, a ki a czél felé törekszik.

Ha alulról nézve még oly magasztosnak, még oly kecsegtetőnek látszik is a hegy orma, a kapaszkodónak szemei elől annál inkább eltünik, minél közelebb jön hozzá ; de minél magasabbra vezet az ösvény, annál tágabbá válik a kilátás, és ha már a láb az ormot maga alatt érzi, a szem az előtt nem is sejtett távolokba csapong, új ormokat, új völgyeket lát, *egy új más világot.*[41]

Igy volt a parallelák elméletével is.

A Στοιχεῖα-ban, melyek kétezer esztendőn át a geometriai gondolkodás alapját alkották, *Euklides* a geometria rendszerét bizonyos feltevésekre állitja, melyeket Ὅροι, Αἰτήματα és Κοιναὶ ἔννοιαι-ra oszt. Az első könyvben az Ὅροι a pont, egyenes, sík, szög, kör, átmérő értelmezését, a Κοιναὶ ἔννοιαι pedig tisztán mennyiségfogalmi meghatározásokat tartalmaznak. Az Αἰτήματα 1—4-ike is mindig elfogadtatott, de nem úgy volt az ötödik postulatummal, mely mivel régibb kiadásokban tévedésből a Κοιναὶ ἔννοιαι közé soroztatott, a mult század kezdetén, mint XI. vagy parallelák axiomája volt ismeretes. E postulatum pedig így szól (*Heiberg* kiadása szerint) :

ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Tehát azt állítja, hogy két egyenes a végtelenbe meghosszabbítva egy harmadik őket metsző egyenesnek azon oldalán találkozik, a mely oldalon a belső szögek összege két derékszögnél kisebb.

Ezen postulatum ellen pedig már a legrégibb idők óta joggal tették azt az ellenvetést, hogy nem közvetlenűl szemlélhető és a geometrák igyekezete oda irányult, hogy ezt a postulatumot bebizonyítsák, azaz, mint a többi *Euklides*-féle feltevéseknek a következményét levezessék. Nem lehet a feladatunk, hogy azokat a kisérleteket ecseteljük, a melyeket ezen czél elérésére két évezreden át tettek és melyeknek közös gyarlósága rendesen abban állott, hogy hallgatva az *Euklides*-féle postulatum helyébe egy más vele egyenértékü, postulatumot helyeztek; megelégedhetünk azzal, hogy leírjuk azt az eszmemenetet, a mely *Bolyai János*-t a szóban levő kérdés megoldásához elvezette.

Kövessük hát azt a leírást, a melyet *Bolyai János* maga adott eszméinek a fejlődéséről.[42]

János első izben 1820-tól kezdve szintén azon fáradozik, hogy az előbb jelzett értelemben az *Euklides*-i postulatumot bebizonyítsa és erre hasonló módszert követ, mint 1733-ban *Saccheri* és 1766-ban *Lambert*,[43] kiknek munkáit különben nem ismerte.

Nagy jelentőségüvé válik *Jánosra* nézve egy fiatal erdélyi honfitársával, *Szász Károly*lyal való érintkezése, ki akkor Bécsben gróf *Teleki Elek* házánál, mint nevelő működött[44] és ki későbben Nagyenyeden juris professorrá lett. *János* kisérleteinek az előmeneteléről atyjának hiven referált, de ez távol attól, hogy fiát további erőlködésre buzdítsa, a már említett levélben szívre ható szavakkal óva inti »azon pokoli holt tenger szirtjeitől, a melyek mellett ő maga is hajótörést szenvedett, széttépett vitorlával, eltört árboczczal visszatérve.«[45] Tanuljon a fiu az ő példáján; »ha igazán kihoztad volna,« írja *Farkas*, »akkor igaz, hogy ennek jobban örülnék, mint egy uradalomnak, de mivel ezt épenséggel nem hiszem, félek, hogy mindenedet elveszíted egy milliónyi sorsjátékra téve.«[46]

Az 1822-ik évben *János* kilép az akadémiából és ezen év szeptember havának 7-én[47] az aktiv szolgálatba soroztatik be; egy évvel reá, mint alhadnagy Temesvárra tétetik át és kevéssel ezután beáll életének az a nagy fordulata, mely az absolut geometria feltalálásával van megjelölve.

1823. nov. 3-ikáról kelt levelében ezeket írja atyjának:

»A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, el készítem, 's mód leszsz, a' parallelákról egy munkát adók ki; ebbe' a pillanatba *nints* kitalálva, de az az út, mellyen mentem, tsaknem bizonyosan igérte a' tzél elérését, ha az egyébaránt lehetséges; nints meg, de olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam el-bámultam, 's örökös kár volna elveszni; ha meglátja Édes Apám, meg-esmeri; most többet nem szóllhatok, tsak annyit: *hogy semmiből egy új más világot teremtettem.*«

Akkor tehát a dolog lényegén még nem hatolt át teljesen, álláspontja körülbelül az lehetett, mint a *Saccherié*, t. i. az *apagoge;* azaz abból a föltevésből, ha a parallelák axiomája nem volna igaz levonta a következményeket, ezek a következmények alkotják azt az új más világot, a melyről ír és már most e következményekben keresi az ellentmondást; de már kételkedik abban, hogy ilyen ellentmondás egyáltalában létezik-e, azt mondja, »ha az egyébaránt lehetséges.« Hogy mikor tette meg a döntő lépést, azaz mikor jutott arra a meggyőződésre, hogy az a geometriai rendszer, a mely a parallelák axiomájától független, magában fenállhat, teljes biztonsággal meg nem állapitható, csak annyit tudunk, hogy ez 1825 tavasza előtt történt. *János* t. i. egyrészt 1825-ben volt tanítójának, *Johann Wolter von Eckwehr*, akkori százados, későbbi tábornagynak egy irásbeli értekezését adta át, melyben a mint maga mondja, már az egésznek az alapja meg volt.[48] másrészt, feljegyzesei szerint, Marosvásárhelyen tett látogatása alkalmával, apjának »absolut ürtanának vázlatát« bemutatta,[49] a mely látogatás 1823 februarius havában ment végbe. *Farkas* — ki akkor már újból megházasodott — ugyanis e látogatásáról kolozsvári barátját *Bodor Pál*-t 1825 február ius 22-én kelt levelében értesíti,[50] a mely levélben fiát jogos apai büszkeséggel így írja le:

»Nagy, kemény természetü szép ifjú, a katonai bátorság az ártatlanság szemérmességével be pelgyedett — se nem kártyázik: se bort, pálinkát, se kávét nem iszik, se nem pipázik, se nem tubákol, még nem beretválkozik, csak péhés — rendkivűl való mathematikus, igaz genie, excellens hegedüs — minden hivatalok közt leginkább szereti a katonaságot; csak az Otiumot szeretné inkább, melybe dolgozhatnék, már is sokat dolgozott a hivatal mellett is.«

Ezen együttlét alkalmával, a mint említettük, *János* atyjával egész rendszerét közölte, de *Farkas* nem értette meg mindjárt teljesen; ez lehetett egyik oka a közöttük kiütött meghasonlásoknak,[51] a milyenek későbben is megzavarták a különben oly gyöngéd viszonyt ezen két kiváló szellem közt; egyéb okok talán a mostoha anyjához való viszonyból, meg az anyai hagyatékra vonatkozó vagyoni kérdésekből[52] eredhettek; de hogy ez a meghasonlás nem igen mélyre menő volt, kitünik abból, hogy április 24-én már azt írja *Farkas Bodor Pál*-nak, »a fiammal hála istennek megint jól vagyunk; írt már Temesvárról kétszer is«.[53] Ezen összejövetelnél valószinűleg megállapíttatott az is, hogy *János* felfedezése miként publicáltassék. *Farkas* maga sürgeti a publicálást, »először«, úgy nyilatkozik, »mert az eszme könynyen átmehet másra, a ki azután előbb közzé teszi, másodszor igaz az is, hogy némely dolognak úgyszólván megvan a maguk epochája, a midőn azután több helyt egyszerre találtatnak.[54]

Mint egy prófétai sugallat, úgy hangzanak *Farkas* eme szavai. Tényleg 1826 február 12-ikén *Nikolái Ivánovics Lobacsefszkij*, az orosz kazani egyetem tanára, az ottani physiko-mathematikai karnak bemutat egy dolgozatot: »Exposition succincte des principes de la géométrie avec une demonstration rigoureuse du théorème des parallèles«, melynek tartalmára nézve különben minden közvetlen tájékozódás lehetetlen, mivel a dolgozat maga elveszett.[55] De a czím szövegezése szerint annyi bizonyos, hogy *Lobacsefszkij* akkor, tehát oly időben, midőn *Bolyai János*, a mint láttuk, új tanát már teljesen kifejtette volt, legfeljebb a *Saccheri* álláspontján, vagyis azon az állásponton lehetett, melyet *János* 1823-ból való levelében jelez. Evvel az sem áll ellentmondásban, hogy *Lobacsefszkij* 1829-ben megjelent értekezésében a »geometria alapjairól«, az első lap alján álló jegyzetben azt mondja, hogy »a szerzőtől magától egy 1826 február 12-ikén olvasott értkezésből kivonva, mely értekezés czíme »Exposition succincte des principes de la géometrie etc.«,[56] mert az, hogy a czím idézésénél az ominosus végső mondatot »avec une demonstration rigoureuse du theórème des paralléles«, kihagyja, arra a feltevésre jogosít, hogy *Lobacsefszkij* ugyan a *Bolyai Farkas*-tól úgynevezett antieuklidesi rendszer[57] kidolgozását, értjük a már említett apagogét, az 1826-iki értekezésből az 1829-ikibe átvette, de hogy az a belátása, hogy az új rendszer magamagában fennállhat, csak az 1826-tól 1829-iki időközben érlelődött meg. Habár e szerint *János* személyi prioritása minden kétség felett áll, az 1829-iki publicatiója *Lobacsefszkij*-nek a publicálás formális prioritását tényleg biztosítja,[58] de tekintetbe kell vennünk, 1. hogy ez a publicatio a bizonyítások hiányos voltánál fogva teljes értékűnek nem mondható, 2. hogy orosz nyelven lévén írva, a nem orosz mathematikusoknak teljesen hozzáférhetetlen maradt, s a geometriai gondolkodás fejlődésére ezért befolyással nem lehetett. *Lobacsefszkij* első közérthető nyelven írt publicatiója 1837-ből van, míg *Bolyai János* az ő felfedezését kifogástalan latinsággal és az előállítás felülmúlhatatlan tökéletességével megírt értekezésben, atyjának az 1831-ik év elején [59] átadta, ki ez értekezést Tentamenjéhez, mint Appendixet kinyomatja, mely Appendix különnyomatát még ugyanazon év junius havában, *János* kivánsága szerint, *Gauss*-nak küldi meg.[60] Ezen alkalommal veszi fel újból *Farkas* a részéről 15 esztendőn át félbehagyott levelezést ifjúkori barátjával.[61]

A válasz Göttingenből ismét késik, a miért Farkas 1832 januariusban az Appendixnek egy második példányát rövidebb levél kiséretében küldi el Göttingenbe; ez a második példány tényleg *Gauss* kezébe kerül és márczius 6-ikáról kelt hires levelében[62] a princeps mathematicorum huszonnégy esztendei hallgatás után válaszol.

Az irat egész tartalma, az út, a melyet *János* követett, azt írja, majdnem teljesen egyezik az ő saját, részben már 30—35 évvel azelőtt tett, meditatióival, módfelett meg van lepve és nagyon örűl, hogy épen régi barátjának a fia az, a ki őt oly csodálatos módon megelőzi. *János*-t szívből üdvözli és különös nagyrabecsüléséről biztosítja.

Nem az egyedüli, de nem is az első alkalom ez, a mint már *Bedőházy* úr megjegyzi,[63] melyben *Gauss*-nak ilyféle nyilatkozatával találkozunk. Midőn 1827-ben *Jacobi* és *Abel* — kinek századik születésnapját nehány hóval ezelőtt a christianiai egyetem megünnepelte — az ellipticus függvények elméletére vonatkozó vizsgálataikat közzé tették, *Gauss* kinyilatkoztatta, hogy ezen vizsgálatok eredményeit részben már 20 év óta ismeri és hogy ugyanazon az úton jutott el hozzájok, mint *Abel*.[64] A két eset hasonló volta abban is nyilvánul, hogy *Bolyai János* majdnem ugyanazon elkeseredett szavakkal vonja kétségbe *Gauss* állításának az igazságát,[65] mint ugyan nem *Abel* maga, de annak lelkes pártfogója, az öreg *Legendre*,[66] kinek a maga saját ügyében már előbb volt prioritási vitatkozása *Gauss*-al. Az elliptikus függvények esetében *Gauss* hagyatéka állításainak az alaposságát fényesen bebizonyította — ha ily bebizonyításra egyáltalában szükség volt — és az absolut geometriára nézve is kitünik levelekből és feljegyzésekből, melyek *Gauss* műveinek VIII. kötetében össze vannak állítva, hogy *Gauss* tényleg az *antieuklidesi rendszert* már az Appendix vétele előtt ismerte. Szándékosan használjuk ezt a kifejezést, mert most, áttérve *Bolyai János* felfedezésének az ismertetésére, látni fogjuk, hogy a mit *János* tett, *több* az antieuklidesi rendszer kifejtésénél, a mely rendszerre nézve a prioritás kérdése *Gauss*-szal szemben már azért is hiábavaló és felesleges, mivel ezen rendszer lényege már 1807-ben *Schweikardt*-nál és 1825, 1826-ban annak unokaöcscsénél *Taurinus*-nál megvan.[67] *Bolyai* felfedezésének az ismertetésében nem térhetek ki egyéni felfogásomnak az érvényesítése elől, annál kevésbé, mivel részletekbe bocsátkozni a mai alkalommal lehetetlen.

Az V-ik euklidesi postulatum helyes, vagy helytelen voltáról a szemlélet révén nem lehet meggyőződni, a mint azt már *Ptolemaeus* megjegyezte.[68] Logikailag három eset képzelhető:

I. Az a két egyenes, a melyet egy harmadik metsz, kellőképen meghosszabbítva a metsző egyenesnek nemcsak azon az oldalán találkozik, a hol a belső szögek összege két derékszögnél kisebb, hanem a másik oldalon is; ez a feltevés, a mint már régebben felismertetett (*Saccheri*), arra a következtetésre vezet, hogy a tér véges, a mi a legtöbb mathematikusnak, így *Bolyai*nak és *Lobacsefszkij*nek is, lehetetlennek látszott — bár *Lambert* és *Taurinus* erről az esetről is szóltak, megjegyezve, hogy az ily módon adódó sík-geometria, a gömbön megvalósúl.[69]

II. A két egyenes mindig azon az oldalon találkozik, hol a belső szögek összege két derékszögnél kisebb, a mi az *Euklides*-féle postulatum.

III. A két egyenes nem találkozik mindig, azaz bizonyos határig találkoznak, azontúl pedig nem. Ez a feltevés az úgynevezett antieuklidesi rendszernek képezi az alapját, mely rendszer főleg abban különbözik a rendes *Euklidesi* rendszertől, hogy benne egy állandó mennyiség szerepel, melyet *Bolyai* *i*-vel jelöl, s mely attól a határtól függ, mely a találkozó egyenesek osztályát a nem találkozó egyenesek osztályától elválasztja; e határ — az úgynevezett parallelismus szöge — a priori meg nem szabható, ezért a *Bolyai*-tól *i*-vel jelölt állandó, minden tetszőleges positiv szám lehet. Ha *i* a végtelenbe nő, az antieuklidesi rendszer átmegy az *Euklides*-félébe.

Ezen antieuklidesi rendszer azonban, melyet *Bolyai* az Appendixben bámulatos elmeéllel és se egyik, se másik vetélytársától el nem ért világos és szabatos előállításban kifejt, nem teszi *János* alkotásának leglényegesebb részét. Ő t. i. mindjárt arra a — *Kant* értelmében — *kritikus* álláspontra emelkedik, hogy emez *i* állandó értékének határozatlannak kell maradnia és az így adodó általános geometriai rendszer az ő absolut geometria rendszere.

Hogy *János* maga épen erre a pontra fekteti a fősulyt, kitetszik különösen feljegyzéseinek egy helyéből,[70] a hol leírja, hogy atyja 1825-iki marosvásárhelyi találkozásuk alkalmával a fia rendszerében épen ezt a pontot nem tudta teljesen felfogni. »Azt mondta (*Farkas*), hogy (*János*) dolgozata csak az antieuklidesi rendszernek kifejtése, azt is állitva, hogy csak két gondolható rendszer létezhetik, az *Euklidesi*, vagy egy másik, a melyben a parallelszög nagysága absolute meg van határozva. Semmiképen nem akarta belátni« — így folytatja *János* — »minden bizonyító okok daczára, hogy hiszen végtelen sokféle hypotheticus rendszer létezhet, melyek közt az igazat nem vagyunk képesek kiválasztani.«

Úgy látszik, hogy *Farkas* később se tudott teljesen *János* álláspontjára helyezkedni,[71] és *Gauss*-nak reánk átjött nyilatkozatai szerint a princeps mathematicorum felfogása (1831 előtt) is a *Farkas* felfogásával egyezik, mert ismételten arról szól,[71] hogy az új rendszerben egy absolut hossz létezik, a mi nyilván csak akkor áll, ha a *Bolyai*-féle *i*-nek valamely határozott értéket adunk.

János álláspontját következőképen fogalmazom. A geometria egy a prioristicus tudomány, melynek feladata abban áll, hogy a tér világának bizonyos tüneményeit, melyekről a szemlélet révén szerezünk tudomást, leírja. A geometria rendszerének, mely egészen abstract fogalmakból építendő fel, csak azt a feltételt kell tehát kielégíteni, hogy eredményei a térbeli szemlélettel összhangzatban legyenek. De mivel ez a szemlélet csak véges tartományra terjedhet ki, az *Euklides* postulátumából eredő kérdésre más feleletet nem adhat, mint azt, hogy a mennyire a kérdéses két egyenes a metsző harmadikon mérve, véges távolságot mutatnak, e két egyenes mindig a két deréknél kisebb belső szögek oldalán találkozik addig, a mig ezt a szemlélettel követni tudjuk, azaz addig, a mig két szög összege egy bizonyos értéken alul marad. Hogy mekkora ez a érték, ezt a szemlélettel — azaz *gyakorlatilag* (practice) a mint *János*[73] mondja — nem lehet eldönteni, csak alsó határt tudunk ezen érték számára kijelölni.

Az olyan feltevés, mint az *Euklidesi* postulatum, avagy valamelyik *meghatározott* antieuklidesi rendszer postulatuma, mely a metsző és nem metsző egyenesek közti határt megszabja, nyilvánvalóan azt foglalja magában, hogy a végesből a végtelen nagyra, vagy a mi mathematikailag ugyanezt mondja, a végtelen kicsinyről a végesre vonunk következtetést. Hogy pedig ilyen következtetésnél egy tetszőleges állandónak szükségképen fel kell lépnie, az analyticus előtt közvetetlenül evidens, mert hasonló viszonyokkal van dolgunk, mintha a sebesség törvényéből a mozgás törvényére akarunk következtetni, szóval, mert differentialis egyenletet kell integrálnunk.[74]

Az absolut geometria rendszere tehát egy tetszőleges állandót tartalmaz, erre, a *Bolyai* i-jére nézve csak az adódik, hogy a szemléletnek alávethető távolságokhoz képest igen nagynak kell lennie, de ezen feltétel mellett az S rendszer — a mint *Bolyai* az absolut rendszert jelöli, szemben az *Euklldesi*-vel, melyet Σ-val jelöl, — egy a szemlélettel teljesen egyező geometriát szolgáltat, sőt ugyanaz áll az olyan rendszerről is, a minőt későbbben *Riemann* vezetett be, a melyben az i négyzetének az értéke nagativ és mely a fentemlített I. feltevés alapján ered. Csak a nevelés és a szokásnak tulajdonítandó az, hogy sokan még ma is az *Euklidesi* rendszert tartják az egyedül szemlélhetőnek.

Az a kétezer esztendős kérdés tehát, hogy vajjon *Euklides* postulatuma helyes-e vagy sem, *Bolyai János* szerint teljesen hiábavaló, e postulátum sem helyes, sem hamis, hanem a geometria felépítésére egyszerüen felesleges; az *Euklidesi* geometria a térbeli tünemények leírására ép oly alkalmas, mint akármily S rendszer, elegendő nagy i mellett; történelmileg az *Euklidesi* rendszer azért fejlődött először, mert bizonyos tekintetben a legegyszerübb. De ezen egyszerüséggel szemben ki kell emelni, hogy a tetszőleges állandót tartalmazó S rendszer sokkal változatosabb, mint az *Euklidesi* Σ. Az S-nek viszonylata a Σ-hoz — hogy egy ugyancsak mathematikusnak szembetünő hasonlatot használjak — olyan, mint az ellipticus függvényeké a trigonometricus függvényekhez, mint az ellipsisé a körhez. Hogy az absolut geometria mégis még az Appendix megjelenése után, figyelmen kivűl maradt vagy harminczöt évig, sajátságos viszonyoknak a következménye, melyeket most röviden fel kell említenünk.

Gauss azt írja,[75] hogy a *Boeoticus*-ok kiabálásától fél. Oly annyira félt, hogy ő, ki különben minden jelentékenyebb tudományos vívmányt a »Göttinger Gelehrte Anzeigen«-ben referálni szokott, nyilvánosan az Appendixről és annak szerzőjéről — kit egy magánlevélben[76] első nagyságú geniusnak mond — soha meg nem emlékezett.

Az Appendix teljesen ismeretlen marad és a tudomány folytatta az útját, nem törődve azzal a meggazdagodással, melyet *Bolyai János* geniusának köszönhetett, miglen egynehány évtized mulva oda érett, hogy az absolut geometriát már képes volt birtokába bekebelezni. De mit tesz a tudomány örök életében egynehány évtized? és mit tesz másrészt ez a néhány évtized egy ember életében! Míg a tudomány lassú fejlődéssel oda jutott, hogy az Appendixet méltathatta, addig annak szerzője elhervadt csendes félrevonult magányában. De talán mégis helyesen cselekedett *Gauss*, midőn a fejlődés folytonos menetét nem akarta megszakítani, talán az ő tartózkodása — melyet mi, kik nagy szellemének utjait követni nem tudjuk, érthetetlennek találunk — óvta meg *János*-t attól, hogy a Boeoticusok őt mint bolondot és eretneket rágalmazzák és így legalább a magány nyugalmában részesíté azt, ki mint más úttörő is, meg nem élhette a tőle ültetett magból fakadó termésnek a megérését.

Gauss magatartása és egyáltalában az elismerésnek teljes kimaradása *János*-nak tüzes, dicsőségre vágyó lelkére a legvégzetesebb következményekkel volt. Az elismerést, melyet a világ tőle megtagadott, ugyancsak beteges önmagasztalással akarja pótolni, minek következtében az ő szenvedélyes ugyan, de személyes ismerősei tanusága szerint, rendkivűl szeretetreméltó természete ingerlékenyre és bizalmatlankodóra változik;[77] büszkén és elzárkózva kerüli tiszttársainak a körét, személyes bátorságra viszálykodó, igazságszeretete[78] sértő rideg-séggé fajul. Nem csoda ekkép, hogy az, előbb oly nagyon kedvelt katonai hivatását megunja, mig 1833 julius havában, határőrökkel való összekoczczanás következtében,[79] nyugdíjazzák, a szolgálatba való visszalépés fentartásával és különös hangsúlyozásával annak, hogy a felsőbb mathesis oktatására alkalmas személyiség. Mint nyugdíjazott százados visszatér hőn szeretett[80] erdélyi hazájába, a hol 13 esztendőn át atyjának Domáldi birtokán él, majd 1846-tól fogva Marosvásárhelyt telepedik le

Bár *János* egészsége nem volt a legjobb — különösen váltólázban szokott volt szenvedni[81] — a legnagyobb hévvel adja magát a munkára. Részben geometriai rendszerének kidolgozásával és új alapra fektetésével, részben arithmetikai kérdésekkel foglalkozik. Hogy *János*-nak ezen és későbbi időben írt dolgozatairól, bár e dolgozatokból *János* életében mi sem került nyilvánosságra, a mai napon számot adhatunk és így képet alkothatunk e férfiú teljes tudományos egyéniségéről, ki még öt esztendővel ezelőtt csakis mint az Appendix szerzője volt ismeretes, *Stäckel* úr ernyedetlen és a legszebb eredménynyel koszorúzott, több évre terjedő munkásságának köszönjük, ki *János* hagyatékát — miután az több mint harmincz esztendőn át ugaron maradt — bámulatos szeretettel és ritka szakismerettel kutatta át és az ezen kutatásban talált kincsekről a Magyar Tudományos Akadémiának több dolgozatban referált.[82] A legutolsó, *Bolyai* János születésnapjának századik évfordulóján bemutatott dolgozatát, mely még nyomtatásban nem jelent meg, *Stäckel* szives engedelmével, ki a kéziratot rendelkezésemre bocsátotta, szintén felhasználhatom itten.

János az Appendixben — hogy az előállítást minél rövidebbre foghassa,[83] — elfogadta az *Euklides* adta alapokat és csak az V. postulatumot mellőzte. De nem zárkózott el az elől, hogy az *Euklidesi* alapokban, különösen az Ὅροι-ban, ezen postulatumon kivül még egyéb nehézségek is vannak, a mire figyelmét különben atyjának munkálkodása és *Gauss* levelének egy passusa[84] is rá irányította. Ezért az a törekvése, hogy a geometria számára egy magában teljesen consequens új rendszert alkosson, sőt az egész mennyiségtudományt is teljesen új alapokra fektesse. Egy munkát tervez ezen czím alatt: »*Reformation der Elemente der Mathematik*«, mely magában foglalná a számtant (Gauss), az időtant, az űrtant és a mozgástant. Az 1835-ik évből való[85] az űrtannak egy terjedelmes előszava, mely szerint a szemlélettől teljesen függetlenül, elvont fogalmaknak és ezekre vonatkozó feltevéseknek a rendszerét akarja felállítani, mely a térbeli tünemények leírására épen és teljesen elegendő. *János* a fogalmak jelölésére is oly szavakat használ, melyek elejétől fogva a szokott, térbeli szemlélettel kapcsolatos szavaktól eltérnek, így a körnek megfelelő fogalmat *gyűrű*-nek (Ring), a gömbnek megfelelőt *kerekség*-nek (Runde) nevezi. Előállítása, mely egy még későbben említendő — mert későbbi időből származó — 134 nyomtatásra kész foliooldalra terjedő kéziratban maradt reánk, sokban hasonlít atyja Tentamenja Conspectus geometriae czímű fejezetéhez, de a mint maga *Phaedrus*-al mondja:[86]

Pater auctor quam materiam reperit,
hanc ego polivi, versibus senariis.

Lassanként a tervezett óriási mű talán kifejlődött volna, de egy körülmény lép közbe, mely őt geometriai elmélkedéseiről arithmetikai vizsgálatokra tereli.

1834-ben a lipcsei *Jablonowski*-féle tudós társaság egy pályakérdést tűzött ki, melyben a complex mennyiségek geometriai ábrázolásának szigorú megalapítását követeli. Atyjától, ki maga is részt vett a pályázaton, felszólítva *János* egy dolgozattal pályázik, mely nyolcz negyedrét oldalból áll s melynek büszke jeligéje ez volt: »*Fructus nonnisi maturi decerpendi*«. E dolgozatban, a *Responsio*-ban, melyet *Stäckel* 1899-ben kiadott,[87] *János* a complex mennyiségek elméletének megalapítására hasonló elveket alkalmaz,[88] a minők alapján atyja a negativ számok elméletét építé fel. Hasonlóképen mint 1837-ben *Hamilton*, ő is a complex mennyiséget számnégyesként fogja fel, mely számnégyesekre nézve a formális számítási szabályokat felállítja, a mivel a complex számok újabb elméletének egyik megalapítójává lesz.

Előállítása azáltal válik kissé nehézkéssé, hogy azon négy jegyen kivűl, melyek, a mint mondja: ad indicandos modos, quibus quantitates in calculo tractari debeat, introducta sunt, még atyja módjára négy megfelelő operatio symbolumot vezet be.

Teljesen eredeti azonban a 8. §., melyben a logarithmusnak akkor új elméletét adja, felfogva azt a sorral értelmezett exponentiális függvény invers függvényeként és azután a logarithmus segélyével a tetszőleges kitevőjű hatványt értelmezi. De ha ebben a 8. §-ban csodálva látjuk, hogy *Bolyai* János teljesen a maga erejéből, mitsem tudva *Cauchy*-ról, 1837-ben egészen modern függvénytani szellemben dolgozik, legnagyobb bámulatunkat kelti fel, a Responsio 9. és 11. §§-a, mely a complex mennyiségeknek az absolut geometriában való alkalmazására vonatkozik.

Már a Tentamen második kötetéhez csatolt *Additamentum* ban *Farkas* fiának nevében reámutatott arra az analogiára, mely a sphaericus trigonometria és valamely *S* rendszer sikbeli trigonometriája közt fennáll és mely már korábbi kutatóknak, különösen *Taurinus* nak is feltünt volt.[89] A Responsio 9. § ban már most azt mutatja meg *János*, hogy az *S* rendszer sikbeli geometriája speciális esete annak a geometriának, a mely valamely *superficies undique uniformis*-on érvényes és ezen paragraphusnak egy részletesebb kidolgozásában[90] azt teszi hozzá, hogy általánosan be lehet bizonyítani, hogy a síkokon kívűl más superficies undique uniformes nem léteznek, mint a gömbök, a hypersphaerák (síkoktól aequidistans felületek), és az Appendixben *F*-fel jelölt felületek, a parasphaerak, a mely utóbbiakon a geometria az *Euklidesi* rendszer síkgeometriájával azonos.

Nem csoda, hogy épen *János* dolgozatának ezen utolsó fejezete teljesen érthetetlen maradt lipcsei biráinak; mert ha ma, felfegyverkezve az utolsó félszázadban elért kutatások eredményeivel, bámulva állunk azon geometriai és analytikai belátás előtt, mely *János* említett megjegyzéseiben nyilvánul, akkor 1837-ben csak *egy* ember élt, ki képes lett volna ezen megjegyzéseket megérteni és kellőleg méltatni — *Gauss*, ki bennök felismerhette volna a rokonságot saját — *János* előtt ismeretlen maradt — disquisitiones generales circa superficies curvas bizonyos fejtegetéseivel.

A dolgozat nem nyerte el a díjat, ép oly kevéssé, mint *Farkas* dolgozata, hanem egy harmadik magyar ember, kinek a neve csak ezen alkalomból[91] vált ismeretessé, kapta a díjnak a felét. E második balsiker *János*-ban a munkakedvet is megtörte; az atyjához való viszony, mely már egy a pályamunkák elküldésénél felmerűlt félreértés következtében meglazult, még ridegebbé válik azáltal, hogy *Farkas* nem restelli, mint már előbb, *Gauss*-hoz,[92] úgy most öcscséhez,[93] írt levelekben fiára panaszkodni; *János* egészen elszigetelve érzi magát és magával és az egész vilaggal meghasonolva, tíz éven át tétlen életet folytat; hajdani erkölcsi ereje mindinkább fogy, egészsége hanyatlik, a szellemóriás látszólag hiú, élvezethajhászó, mindennapi emberré törpül. De 1848-ban oly esemény lép *János* életébe, mely csak alvó szellemi energiáját még egyszer új életre ébreszti és őt újból tudományos munkához szólítja. — *Gauss* közbenjárása által, kivel *Bolyai* Farkas az 1836 óta megakadt levélváltást 1848 január 18-án ismét felveszi, *Lobacsefszkij*-nek 1840-ben megjelent munkája »Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien«, *Farkas*-nak a kezébe kerül, ki azt október 19-én *János*-nak adja át.

Nagy vetélytársa ezen munkája áttanulmányozásának az eredményeit *János* egy értekezésbe foglalja, (az egyedüli mathematikai, melyet magyar nyelven írt), melyet *Stäckel* és *Kürschák* urak a mult évben közzétettek.[94] Egy bevezetés után, melyben *János* régi szenvedélyességgel, de régi elmeéllel is a saját és a *Lobacsefszkij* vizsgálatainak találkozására vonatkozó gyanításait kifejti, következik a *Lobacsefszkij*-léle munkának egy igen éles, de teljesen tárgyi birálata, melyben *János* egyebek közt, *Lobacsefszkij* előállításának olyan pontatlanságára utal, melyet rajta kivűl senki sem vett észre. Majd a Responsióban is tárgyalt amaz összefüggésről is értekezik, mely a sphaericus és az absolut síkbeli trigonometria között fennáll, mely összefüggés *Lobacsefszkij*-nél csak mint tisztán analytikai tény említettik fel, mig ő a magasabb geometriai szempontot igyekszik érvényesíteni;[95] közben oly észrevételeket tesz, a melyekből kitűnik, hogy *János* a legkülönbözőbb geometriai és algebrai problemákról gondolkodott, a milyenek a területek végszerű egyenlősége, az algebrai egyenletek megoldása, a trigonometricus függvények arithmetikai tulajdonságai és hogy az absolut geometria mechanikai és csillagászati következményeivel is foglalkozott. Igaz, hogy részben csak odavetett jegyzeteket ír, mint általában későbbi dolgozatainak egy részében, ellentétben az Appendix classicus pontosságával,[96] vagy csak felületes észrevételekre szorítkozik, vagy pedig atyja virágos stylusába esve, terjedelmes peroratiókban régi gondolatokat ismétel. Különösen figyelemreméltó még az a kritika, melyet *János Lobacsefszkij*-nek azon kisérletére gyakorol, a mely az *i* állandó mérések utján való meghatározására czéloz; ezen alkalommal *János* »genialis intuitio«-val azt az alakot is említi, melyben a *Newton*-féle gravitatió törvény az absolut térben kimondandó.[97]

Igy visszanyerve a munkához való kedvet, *János* a harminczas években folytatott gondolatmeneteket ujból felveszi. Már az 1832-ben *Farkas*-hoz intézett levelében *Gauss* *János*-nak a figyelmét a tetraëder köbösítésének az absolut geometriában való elvégzésére irányította. *Farkas* erre azt felelhette,[98] hogy *János* e feladatot már 1830-ban megoldotta, de az ezen feladatra vonatkozó feljegyzések[99] — egy kivétellel — csak az 1856. évből származnak és csak egy speciális tetraëder köbösitését tartalmazzák, mely különben ugyanaz, a melyre nézve a térfogat meghatározását *Gauss* és *Lobacsefszkij* is megkezdték volt. Még csodálatosabb, hogy azon négy módszer közt, a melyeket *János* a szóban levő problema megoldására javaslatba hoz, az első, melyet — a mint *Stäckel* megállapította[100] — közvetlenül *Gauss* 1832. évi levelének vétele után felírt, azzal egyezik, a melyet *Gauss* maga egy ugyanezen évből származó (1900-ban publicált),[101] feljegyzésben adott, mig a második lényegében azzal találkozik, a melyet[102] *Lobacsefszkij* a »Kazani Hiradóban« 1829-ben közölt.

Hogy *János* mennyire autodidakta volt, kitünik abból, hogy azt az integrált, melyre a tetraëder köbösítése vezet, elemi függvényekkel igyekszik kifejezni.

Továbbá visszatér *János* az ürtanra vonatkozó munkálataihoz. Mint már említettük, egy terjedelmes része e munkának nyomtatásra kész alakban is megvan, a kézirat 1855-ből való. A geometriai alapfogalmak bevezetésénél *Stäckel* megjegyzése szerint [103] különösen figyelemre méltó, hogy *János* a síkbeli symmetria elvét bőven felhasználja, a mivel az is áll összefüggésben, hogy a két rögzitett pont körüli forgatást a legegyszerübb és legbiztosabban véghez vihető mozgásnak tekinti. Ennek folytán a geometriai szerkesztéseket hasonló alapra igyekszik fektetni, mint *Mascheroni* az ő »*Geometria del compasso*« czímű, 1797-ben megjelent munkájában, a mely munkát *János* ismer és dicsér, bár a maga módszerét a *Mascheroni*-é fölé helyezi. A *szerkezettan* (Constructionslehre) ezenkivűl az oly vizsgálatokat tartalmazza, melyek a ma *Analysis situs*-nak nevezett tanba tartoznak. *János* a későbbben *Listing*- és *Riemann*-tól kifejtett, a felületek összefüggésére vonatkozó elmélet alapvonalait adja és az *Euler*-féle polyëdertétel általánosítását többszörösen összefüggő felületü polyëderek esetére körvonalozza. Úgy látszik, hogy a munka kiadásával járó nehézségek elijesztették *Jánost* a kidolgozás folytatásától; legyen szabad e helyen is azt a kivánságot kifejezni, hogy a reánk maradt részlet, melyből *Stäckel* úr legújabb dolgozatában szemelvényeket közöl, lehetőleg teljesen is kiadassék.[104]

Hogy *János* a Responsio 9. §-ában és *Lobacsefszkij* munkája birálatában is érintett felfogására, mely szerint a sikbeli geometria a superficies undique uniformis-on érvényes geometriának speciális esete, visszatér, szoros kapcsolatban van egy oly kérdéssel, mely *Jánost* már 1830 ban foglalkoztatta, s melylyel 1850 után ismét behatóan foglalkozik, egy kérdés, melyben az absolut geometria megalkotója tragikus sorsának java része is rejlik. A kérdés az, hogy vajjon az absolut geometria ment-e ellentmondástól? Az Appendix végén azt mondja *János:* »Superesset denique (...), impossibilitatem (...) decidendi, num Σ aut aliquod (et quodnam) *S* sit demonstrare; quod tamen occasioni magis idoneae reservatur.« Ez a bebizonyítás meg volna, ha ki volna mutatva, hogy a tetszőleges állandóval járó *S* rendszer sem magamagával, sem pedig a szemlélettel nincs ellenmondásban. Egy helyen[105] *János* erre nézve az egyedüli helyes felfogást vallja, hogy tudniillik ez a kérdés csak akkép dönthető el, hogy az absolut geometria rendszere teljesen kifejtetik és észleltetik, vajjon adódik-e ellenmondás, vagy sem. A követendő út az volna, a melyen *János* az ürtanában indúlt, de a helyett, hogy *János* ezt már most minden erélylyel folytatta volna, azt látjuk, hogy a saját tanán kételkedni kezd.

A sikbeli geometria ellentmondástól ment voltát, hasonlóképen mint *Lobacsefszkij* is, abból következteti, hogy a sikbeli trigonometria a sphaericus trigonometriából akkép adódik, hogy a gömb radiusát képzetesnek választjuk; de a hasonló okoskodást a térre nézve nem tudja alkalmazni, mivel az ahhoz szükséges segédeszközöket nélkülözi, különösen azt a gondolatot, mely mikor először 1844-ben *Grassmann*-tól, majd *Cayley*- és *Cauchy*-tól kimondatott, a maga merészségével a legélesebb ellentmondásra — mert félreértésre — talált és mely gondolat nem más, mint a több dimensiós geometria. Így látjuk, hogy *János* mindig ellentmondást keresve, terjedelmes számitásokat végez,[106] néha azt véli, hogy ily ellentmondásra bukkant, a mit azután számítási hibának ismer fel; de mindenesetre — és ez *János* tudományos pályájának igazi tragikuma — élethossziglan nem tudott meggyőződni arról, hogy az ő rendszere a térben sem vezet ellentmondásra.

Kétségtelen, hogy tiszta geometriai úton — a több dimensiós geometria nélkülözésével is — ki lehet mutatni, hogy az absolut térgeometria nem ellentmondásos; a mint már jeleztük, *János* maga jelölte meg ennek az utját az ő ürtanában. De daczára azóknak a fontos vizsgálatoknak, a melyeket ez irányban tettek, ezen módszer teljesen systematicus követése még ma is hiányzik, úgy, hogy arról a más két módszerről kell még megemlékeznünk, melyek a történelmi fejlődés során a szóban forgó czél tökéletes eléréséhez vezettek.

Az egyik az analyticus geometria módszerén alapszik. A már említett, 1828-ban megjelent disquisitiones generales circa superficies curvasban *Gauss* az *Euklidesi* térben foglalt felületeket oly módszerrel tárgyalja, a melynek révén kiadódik, hogy a felületek tulajdonságai két osztályba sorozhatók. Az egyik osztályba tartozó tulajdonságok lényegesen ahhoz vannak kötve, hogy az illető felület egy háromdimensiós *Euklidesi* térben létezik, a másik osztályéi pedig tetszőleges kétdimensiós sokaságokra vonatkoznak, a melyek ívelemének a négyzete a coordináták positiv definita négyzetes differentiális alakjával előállítható. *Gauss* ezen módszerét általánosítva, *Riemann* 1854-ben a göttingeni bölcsészeti kar előtt tartott habilitatiós előadásában »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«[107] egy nagyszerü elméletnek a körvonalait adta, mely, ha megengedjük, hogy a tér számsokaságnak tekinthető, minden képzelhető geometriai rendszert felölel.

Ha n valós mennyiségnek a rendszerét pontnak nevezzük, akkor két végtelen közeli pont távolsága még mint a két pont coordinatáinak tetszésszerinti függvénye értelmezhető. Sajátságos megfontolások, melyek lényegében egy a szemlélettel a posteriori elérendő összhangzatra czéloznak, arra vezetik *Riemannt*, hogy ezen infinitesimális távolság, vagy ívelem négyzetét a coordinatadifferentiálok positiv definita négyzetes alakjának válassza. Az így meghatározott sokaságnak a jellege a helynek $\frac{n(n-1)}{2}$ számú függvényével van meghatározva, melyek $n=2$ esetén arra az egyetlen mennyiségre vezetnek, melyet *Gauss* valamely felület *görbületi mértéke* néven vezetett be. Ha a sokaság olyan, hogy az $\frac{n(n-1)}{2}$ függvény mind egymással egyenlő, a miből *Schur* szerint,[108] már az következik, hogy állandók, akkor $n=3$ esetén az így adódó, állandó görbületi sokaság megfelel az *Euklidesi* Σ rendszernek, ha a görbület zeró, a *Bolyai*-féle S rendszernek, ha negativ, míg a positiv görbület rendszere, mely itt először fellép és mely ezért *Riemann* rendszerének neveztetik, nem egyéb, mint az, melyben a két egyenesre vonatkozó kérdésre az első lehetőséggel válaszolunk. Mivel az az analytikai disciplina, mely az ilyen állandó görbületü sokaság geometriáját szolgáltatja, ellentmondástól ment, következik, hogy ugyanaz az absolut geometria rendszerére is áll.

Riemann dolgozatának a megjelenésétől 1867-től kelteződik az absolut geometriának a mathematikai tudományok birtokába való tényleges bekebelezése. Egy nem sokkal ezután megjelent dolgozatban *Beltrami* azt mutatta meg, hogy az S rendszernek megfelelő tér az *Euklidesi* tér valamely gömbjének a belsejére leképezhető és hogy épen úgy, mint a

Riemann-féle rendszer síkgeometriája egy gömbön valósítható meg, úgy a *Bolyai* *S* rendszerének sík-geometriája megvalósul az *Euklidesi* térnek bizonyos felületén, melyet *Beltrami* *pseudosphaerá*-nak nevezett el. Gömb és pseudosphaera pedig, mint *Gauss* szerint mondjuk, állandó görbületü felületek, a rajtuk érvényes geometriára nézve tehát a *Bolyai János*-tól superficies undique uniformesnek mondott felületosztálylyal egyeznek, úgy, hogy itt a Responsio 9-ik §-ának gondolatmenetével találkozunk.

Nem tagadható, hogy *Beltrami* az absolut geometriának eme *Euklides* térbeli interpretatiójával sok oly mathematikust nyert meg az új tannak, ki addig az absolut geometriát csak puszta agyrémnek volt hajlandó tekinteni, de azért ezt az interpretatiot nem szabad túlbecsülni.

Ugyanis a mi az ellentmondás kérdését illeti, ezen interpretatió a kérdést az absolut geometriára nézve nem annyira megoldja, mint inkább az *Euklidesi* geometria megfelelő kérdésére visszavezeti; hogy ez utóbbira nézve ellentmondás nem létezése soha kétségbe nem vonatott, igaz, de ép oly igaz, hogy a priori az ellentmondás kérdése az *Euklidesi* geometriában egy árnyalattal sem különb, mint az *S* rendszerben.

Más tekintetben azonban igenis ismerettani szempontból is haladást jelez *Beltrami* munkája, a mennyiben kimutatja, hogy az absolut rendszer tere mindig bent foglaltatik egy több dimensiós *Euklidesi* térben, úgy, hogy a több dimensiós geometria fogalma kimeríti és felöleli az absolut geometria fogalmát.

A második út, a melyen be lehet bizonyítani, hogy az absolut geometria nem tartalmaz ellentmondást, azért nevezetes, mert azt az összefüggést derítette ki, mely az absolut geometria és a közönséges geometriának ama fejezete közt áll fenn, melyet újabb, synthetikus vagy projectiv geometria néven különösen a mult század első felében dolgoztak ki. Azokban a geometriai tételekben ugyanis, melyek tisztán graphikai természetüek, bizonyos *dualitás* mutatkozott, másrészt az adódott, hogy mindazok a tételek bírnak tisztán graphikai jelleggel, a melyekben távolok és szögek csak az úgynevezett *kettős arány* alakjában szerepelnek. 1859-ben *Cayley*t algebrai természetü vizsgálatok arra vezették, hogy két pont távolát és két egyenes vagy sík hajlásszögét ilyen kettős arányokkal állítsa elő, azáltal, hogy egy bizonyos másodrendü felületet absolut képződményként vett segítségűl. Ezen másodrendű felület természete szerint három különböző geometriai rendszert talált, melyeket elliptikus, parabolikus, illetőleg hyperbolikus rendszernek neveznek. Későbben (1870—71) *Klein Felix* azt mutatta meg, hogy e három rendszer sorban a *Riemann*, *Euklides*, illetőleg *Bolyai*-féle rendszerrel egyezik, a mivel az, hogy az absolut geometria ellentmondástól ment, újból ki van mutatva.

A projectiv geometria mind a három rendszerben ugyanaz, a mi onnét közvetlen világos, hogy az a két állandó, a melytől valamely geometriai rendszerben a távolság és a szög mértéke függ, t. i. a hosszegység és a görbület mértéke, a kettős arányból kiesik, és ebből közvetlenűl kiadódik a dualitás elve, mivel ez nem mond egyebet, mint azt, hogy az *Euklidesi* tér projectiv geometriája a *Riemann* féle térben is áll.

Fájdalom, *Bolyai János* már nem lehetett tanuja annak, hogy az ő tana a kutatásnak mindegyre szélesebb köreit hódítja meg, hogy nemcsak a geometriában, hanem az analysisben és a mechanikában is nagyjelentőségü haladások kútfejévé válik.

Ismeretlenűl és mindenkitől, még attól az egytől is elfelejtve, ki geniusát méltatni tudta, örömtelen életét élte.

Mikor 1856-ban atyjában környezetének azt az egyedüli emberét is elvesztette, ki személyiségét és tudományos törekvéseit megérteni képes volt, *János* a mathematikával végkép felhagyott, de fájdalmaktól és szenvedésektől megtört testében is lankadatlanúl munkálkodó szelleme másféle problemák felé fordúlt. Egy, az egész emberi tudást felölelő tudományos rendszert akart teremteni, tökéletes világnyelven megírva, mely czélra magyar anyanyelvét alkalmasnak véli. Világboldogító eszméket, a sociális alapon nyugvó állam eszméjét gondolja ki, de mindezeknek a kezdetén megakad. Ötvennyolcz éves korában fáradt és roskadozó aggastyán, bensőleg oly gazdag, külsőleg oly tragicus életét 1860 január havaban végzi be.

Midőn *János* a maga egyetlen könyvét, az Appendixet megalkotta, a világ annak megértésére még nem volt megérve, mint ennek a körűlménynek, mint külső viszonyainak, mint ki nem elégített nagyravágyásának az áldozata, elesett, mint egy tragikus hős, miután a legmagasabbat elérte, miután a kétezer esztendős problemát megoldotta. — Ma az egész művelt világ áldoz emlékének, nem sírjára, hanem örökbecsű munkáira téve le a bámulat és a hála babérát. És mi, a kik ma itt vagyunk, hogy emlékét ünnepeljük, emlékezzünk meg hálásan azokról a férfiakról is, kik a világ figyelmét erre az elfelejtett emberre és annak sohasem ismert könyvére először irányították, a német *Baltzer*ről, a franczia *Hoüel*-ről és végre, de nem utolsóként, a mi *Schmidt Ferencz*-ünkről, ki harmincz esztendőn át, 1867-től haláláig, életének legszebb feladatát abban látta, hogy nagy honfitársának, *Bolyai János*-nak az elismeréseért tettel és írásban küzdjön.

Midőn kilencz évvel ezelőtt a kazani egyetem *Bolyai János* szellemi rokonának, *Lobacsefszkij* születésének századik évfordulóját megünnepelte, midőn nehány hónappal ezelőtt a christianiai egyetemen az összes művelt nemzetek — sajnos, csak mi nem lehettünk ott — *Abel* évszázados ünnepére összegyűltek, ezek az egyetemek az ünnepelt férfiakat büszkén magukénak vallhatták, vagy mint tanítót, vagy mint tanulót. Mi most nem vagyunk ebben a szerencsés helyzetben; midőn a múlt század első felében *Bolyai János* élt és működött, a mi egyetemünk száz éves álmát aludta. De mindjárt az első években, miután (1872-ben) Felséges Urunk akaratából új életre kelt, a *Bolyai* traditió hű ápolójává lett. A mathesis egyik legelső tanítója a mi egyetemünkön [108] már 1874-ben előadást tartott az absolut geometriáról, talán egyáltalában a legelső ilynemű előadás, mely tudomány-egyetemen tartatott, mert — úgy mondá — hazánkban, hol amaz ideig a két *Bolyai*-n kivűl számottevő mathematikus nem élt, ezen két férfiú működéséből kell minden további tudományos törekvésnek kiindúlni. Azóta az Appendixben foglalt tan hírdetése egyetemünkön nem szünetelt és ma sem jövünk üres kezekkel az ünnepre.

Feladatom azt az emlékíratot bemutatni, melyet egyetemünk mathematikai és természettudományi kara a mai ünnepen kibocsát és melyben az egyetemünkön kivűl álló két tudós, *Stäckel Pál* Kielben, és *Bonola Róbert* Paviában is közreműködött. Egyébre nézve az írat előszava nyújtson tájékozást.

A mai ünnepre csak a latin szöveg készülhetett el, azonban előszavát magyar fogalmazványban van szerencsém felolvasni:

»Tudomány-egyetemünk Mathematikai és Természettudományi Kara 1899 évi deczember hó 29-én tartott ülésében elhatározta, hogy annak a napnak a századik évfordulóján, a mely napon *Bolyai János* született, születési házát emléktáblával jelöli meg és emlékíratot bocsát ki, melynek czélja legyen feltüntetni azt a befolyást, a melylyel a *Bolyai János*-tól megalkotott absolut geometria a mathematikai tudományok fejlődésére a XIX. évszázban volt.

Midőn ez iratot az egész világ tudós társulatainak, egyetemeinek és mathematikusainak megküldjük, kedves kötelességünknek tartjuk, hogy őszinte hálánkat nyilvánítsuk a Nagyméltóságú vallás- és közoktatásügyi m. kir. Minister úrnak, a ki a kiadás költségeit rendelkezésünkre bocsátani kegyes volt, a Magyar Tudományos Akadémiának, mivel jóakaratának köszönjük, hogy iratunkat *Bolyai János*-tól, az apjához intézett, az absolut geometria történelmére fontos levelének hű másával diszíthetjük, végre azoknak a tudósoknak, kik iratunk létesítéséhez közreműködni szivesek voltak.

Legyen ez irat jele annak, hogy hazánk nagy fiának emlékét híven őrzi és ápolja és járuljon hozzá ahhoz is, hogy a *Bolyai János*-tól megalkotott tan továbbra is viruljon és gyarapodjék«.

JEGYZETEK.

[1] *Bolyai Farkas* és *Gauss K. F.* levelezése, kiadják *Schmidt* és *Stäckel* (Budapest, 1899) p. 152 „und bald schwuren wir unter der Fahne der Wahrheit Brüderschaft".

[2] A. i. h. „der nie in voraus spricht, auch bey fertigen schweigend.

[3] A. i. h.

[4] V. ö. *Bolyai Farkas* levelét fiához, *Stäckel*-nél, Mathem. és Természettud. Értesítő, 1900, p. 243, 244.; a folt szó *Saccheri* „*Euclides* ab omni n a e v o vindicatus"-ára emlékeztetett, v. ö. *Engel* u. *Stäckel*, die Theorie der Parallellinien von *Euclid* bis auf *Gauss* (Lipcse, 1895) p. 18, 36.

[5] Lásd *János* feljegyzéseit, *Stäckel* a. i. h. p. 248; *Gauss* levelét *Gerling*-hez (1832 február 14), *Gauss—Bolyai* levelezése p. 193 „mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten habe".

[6] *Stäckel* a. i. h. pag. 248. „In den Elementen der Arithmetik und Geometrie war damals *Gauss* weniger fest als ich durch mich selbst, aber ihm waren die höheren Rechnungen bereits eine Spielerei, wo ich noch nicht einmal eine Idee davon hatte«.

[7] *Gauss—Bolyai* levelezése p. 153.

[8] Ugyanott p. 179.

[9] Ugyanott p. 152.

[10] Ugyanott p. 40.

[11] Ugyanott p. 49.

[12] Ugyanott p. 57. „Unser Sohn ein herrlicher Knabe, ist ein weckender Strahl in die Nacht unserer Seele".

[13] *Bedőházy*, A két *Bolyai* (Marosvásárhely, 1896) p. 66.

[14] *Gauss—Bolyai* levelezése p. 56. 2. kikezdése.

[15] A. i. h.

[16] Ugyanott p. 99.

[17] V. ö. *Schmidt*, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, VIII. kötet p. 137, *János* önéletrajzából: „er machte mich auf die grosse Lücke in der Parallelentheorie aufmerksam".

[18] *Gauss—Bolyai* levelezése p. 99.

[19] Ugyanott p. 100, um nach unserem Gebrauche in unseren drei Landescollegien Examen abzustatten, nicht alle thun es, aber ich will von dieser Regel nicht weichen.

[20] Ugyanott p. 99.

[21] V. ö. *Bolyai—Bodor* levelek, a Mathematikai és Physikai Lapok XI. kötetében p 198, *Gauss—Bolyai* levelezése p. 49, 87.

[22] Lásd *Gauss—Bolyai* levelezése p. 96.

[23] Ugyanott p. 100.

[24] V. ö. ugyanott p. 101 és *Bolyai—Bodor* levelek p. 202.

[25] *Bolyai—Bodor* levelek p. 204.

[26] *Gauss—Bolyai* levelezése p. 98 's köv.

[27] Ugyanott p. 87.

[28] *Bedőházy* a. i. h. p. 192, 193.

[29] V. ö. különösen *Gauss—Bolyai* levelezése pag. 97, 100. 1. 2. 3.

[30] *Bedőházy* a. i. h. 39.

[31] *Schmidt* a. i. h. tévesen 1817-et ír; az 1818 év helyes, a mit a bécsi cs. és kir. műszaki Akadémia a *Bolyai* ünnepen jelen volt képviselője, *Budisavljevic* alezredes úr az Akadémia actái szerint is igazolt.

[32] V. ö. pld. *Bolyai—Bodor* levelek, p. 214; s köv., 21, 23, 24, 25, 28 számú levelek.

[33] *Bedőházy* a. i. h. p. 77.

[34] *Bolyai—Bodor* levelek p. 214; 1819 jun. 14. kelt levél.

[35] Ugyanott p. 215, 217.

[36] Ugyanott p. 218, 219.

[37] Ugyanott p. 217.

[38] *Stäckel* a. i. h. p. 242.

[39] *Stäckel* a. i. h. p. 243. s köv.

[40] *Stäckel* a. i. h.

[41] Lásd: *János* levelét atyjához 1823. nov. 3-áról, mely facsiméleben egyetemünk emlékiratához van csatolva.

[42] *Stäckel* a. i. h. p. 242 s köv.

[43] Ugyanott.

[44] Ugyanott p. 246.

[45] Ugyanott p. 247.

[46] Ugyanott.

[47] *Schmidt* a. i. h. p. 139.

[48] *Stäckel* a. i. h. p. 252; *Bedőházy* a. i. h. p. 427.

[49] *Stäckel* a. i. h. p. 252.

[50] *Bolyai—Bodor* levelek p. 228; 1825 után *János* nyugdíjaztatásáig (1833) alig volt ismét Marosvásárhelyt, de 1829 körül (v. ö.

Stäckel a. i. h. p. 14.) még egyszer találkozott apjával (v. ö. az 59 számú jegyzetet), azonban nem tudni, hogy hol.

[51] *Stäckel* a. i. h. p. 252, 253.

[52] *Bolyai—Bodor* levelek p. 229. 1825. április 24. kelt levél.

[53] Ugyanott p. 228.

[54] *Stäckel* a. i. h. p. 253.

[55] *Engel, N. J. Lobatschefskij* (Lipcse, 1899) p. 370, 372.

[56] Ugyanott p. 1.

[57] Lásd *Stäckel* a. i. h. p. 253.

[58] *Engel,* a. i. h.

[59] A *Stäckel*-től a. i. h. kivonatban közölt feljegyzésekben *János* azt írja: „Umstände und Hindernisse *verzögerten* die Herausgabe, bis *endlich* ein *zufälliges* Zusammentreffen mit meinem Vater veranlasste dass ich das Wesen der Sache in lateinischer Sprache verfasste und Anfang 1831 meinem Vater übergab". Ezen passust *Stäckel* úr egy 1903. febr. 3. kelt levélben szives volt velem közölni.

[60] *Stäckel* a. i. h. p. 254.

[61] *Gauss—Bolyai* levelezése p. 102 s köv. Megjegyzendő, hogy e helyen, valamint *Schmidt*-nél a. i. h. p. 141 „Anhang" helyett tévesen „Anfang" áll; az „Anhang" helyes volta nemcsak a facsimile szerint kétségtelen, de az összefüggésbe is jól beillik, *Farkas* t. i. azt írja: „es ist der erste Anhang (t. i. Appendix) von meinem Werke".

[62] *Gauss—Bolyai* levelezése p. 109 s köv.

[63] *Bedőházy* a. i. h. p. 423.

[64] *Briefwechsel* zwischen *Gauss* und *Schuchmacher*, Bd. II. (Altona, 1860) p. 177, 178. (1828. május 30.)

[65] *Stäckel* a. i. h. p. 255.

[66] *Jacobi,* Werke, I. kötet (Berlin, 1881), p. 398, 418.

[67] Lásd *Engel* u. *Stäckel,* die Theorie der Parallellinien (Lipcse, 1895) p. 237 s köv.

[68] *Procli,* in primum *Euclidis* elem. libr. comm. Ex rec. *G. Friedlein* (Lipsiae, 1873). p. 191.

[69] *Engel* u. *Stäckel* a. i. h. p. 145, 257.

[70] *Stäckel* a. i. h. p. 253.

[71] V. ö. különösen *Gauss—Bolyai* levelezése p. 115 lent, p. 116. fönt.

[72] Lásd levél *Gerling*-hez (1816 április 14), *Gauss*, Werke VIII. kötet (1900) p. 169, levél *Taurinus*-hoz (1824. november 8.) ugyanott p. 187; v. ö. ugyanott p. 165.

[73] *Stäckel* Mathem. és Term.-tud. Értesítő 1902, p. 169, 170 és ugyanott p. 62, 63.

[74] V. ö. *Stäckel* megjegyzéseit *Gauss* műveinek VIII. kötetében, pag. 253—264.

[75] *Gauss* levele *Bessel*-hez (1829 jan. 29), Werke VIII. kötet, p. 200.

[76] *Gauss* levele *Gerling*-hez (1832 febr. 14) ugyanott p. 220.

[77] *Bedőházy* a. i h. p. 442.

[78] Ugyanott p. 301 idézve van *János* e nyilatkozata: »gyermekkoromtól fogva egyik fő alapvonása volt jellememnek az igazság határtalan szeretete erkölcsileg és tanilag«.

[79] Ugyanott p. 442.

[80] *Bolyai—Bodor* levelek p. 228 „mely irásából azt is látom, hogy Erdélyre hazai érzéssel tekint vissza."

[81] V. ö. *Stäckel*, Mathem. és Term.-tud. Értesítő 1899. (Responsio) pag. 266, 267.

[82] Mathem. és Term.-tud Értesítő, 1899, 1900, 1902; *Kürschák*-kal ugyanott 1902.

[83] *Stäckel* a. i. h. 1902, p. 160. v. ö. *Bolyai Farkas*: Tentamen etc, I. kötet p. 489—490, idézve *Gauss—Bolyai* levelezésében p. 194. lent.

[84] *Gauss—Bolyai* levelezése p. 112.

[85] Lásd a szövegben említett még ki nem adott *Stäckel*-féle értekezést, melyet a következőkben „*Stäckel* kézirat"-nak idézem.

[86] *Bedőházy* a. i. h. p. 193.

[87] Mathem. és Term.-tud. Értesítő 1899, p. 259 s köv.

[88] *Stäckel* a. i. h. Bevezetés; ugyane Bevezetést v. ö. a következőkre nézve is.

[89] *Engel* u. *Stäckel* a. i. h. pag. 252 és *Stäckel* Abh. zur Gesch. der Mathem. IX. kötet, (Lipcse, 1899) p. 416—419.

[90] *Stäckel*, Mathem. és Term.-tud. Értesítő, 1902, p. 164.

[91] *Stäckel* ugyanott, 1899, Responsio, Bevezetése.

[92] *Gauss—Bolyai* levelezése, p. 117, 118.

[93] *Bedőházy*, a i. h. p. 299 s köv; *Farkas*-nak *Antal* öcscséhez írt levele későbben *János* kezébe került.

[94] Mathem. és Term.-tud. Értesítő, 1902, p. 40 s köv. *János* értekezésének teljes czíme ez:

Tan vagy Jegyzetek vagy Értekez(l)et, Észrevételek és Hozzávetmények, Világosítmányok, Cáfolatok — némi egyebekkel együtt — jelenleg minden rendszer nélkül a mint jött —

a

Lobatsewsky Miklós

cár — vagy oroz—császári Valoságos Álam vagy álodalmi Tanácsnok és a Kasani Egyetembeni Rendes Tanárnak az egy-közü egyenek vagyis a' XI. Euklidi elv' vagy arroli tan' tárgyában tett Berlinben 1840. évben ki-jött és a Fincke' könyv-(kereskedő-) boltjaban található ürtani vizsgálataira nézve, ...

E czím közlését *Kürschák* úr szívességének köszönöm.

[95] Ugyanott, és részletesebben Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn XVIII. kötet p. 289.

[96] *Stäckel* Mathem. és Term.-tud. Értesítő 1902, p. 44.

[97] Ugyanott pag. 64 és Mathem. und nat. Berichte aus Ungarn XVIII. kötet p. 277; v. ö. *Stäckel,* de ea mechanicae analyticae parte etc., *Joannis Bolyai* in Memoriam (Kolozsvár, 1902.) p. 64.

[98] *Gauss—Bolyai* levelezése p. 115, *Stäckel* Mathem. és Term.-tud. Értesítő, 1902. pag. 175; v. ö. a *Tentamen*-nek a 83. jegyzetben idézett passusát.

[99] *Stäckel* a. i. h. 175.

[100] Ugyanott.

[101] *Gauss* Werke, VIII. kötet, p. 232.

[102] *Engel* a. i. h. p. 53 s köv.

[103] *Stäckel* kézirat.

[104] Utólag *Stäckel* úr szives volt velem közölni, hogy az *űrtant* a két *Bolyai*-ról szóló, készülőben levő, nagy munkájában fogja közölni.

[105] *Stäckel* Mathem. és Term.-tud. Értesítő, 1902, p. 172.

[106] Ugyanott p. 174.

[107] Abh. der Gött. Ges. der Wissenschaften XIII. kötet (1867), Werke (1892) p. 272 s köv.

[108] Mathem. Annalen, XXVII. kötet (1866).

[109] *Réthy Mór*, most budapesti műegyetemi tanár.

III.

A lelkes éljenzéssel fogadott beszéd után elnöklő rector sorra fölkérte szólásra a küldöttségek szónokait, a kik az alábbi rendben a következő beszédeket mondották:

Br. Eötvös Loránd, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke:

Tisztelt Ünneplő Gyülekezet!

Környezőitől, atyján kivűl, meg nem értve, magából és magának alkotta meg Bolyai János a geometriának azt az új világát, a melynek mélységeiben ő s később az ő nyomdokán haladók gazdag kincseket tártak föl a tudománynak.

Elismerésre, jutalomra e hazában nem számíthatott. Nem látta ő, csak elképzelni tudta azt a, szebb világot, a melyben őt megérteni tudó emberek is élnek, talán ott valahol túl a hegyek határán, ott, a hol a göttingai szellemóriás lakik, kiről neki atyja, mint ifjúkori barátjáról, oly szivesen beszélt. Ennek az akkor még tőlünk oly távolraeső és idegen tudományos világnak írta, ennek elismerésében bízva adta ki Bolyai azt a művét melylyel magának s magyar nevével magyar nemzetének, el nem évülő dicsőséget szerzett.

Nekünk, a kik ma, száz évvel az ő születése után, itt összegyűltünk, már jobb a sorsunk. Hazánk azóta a tudományos világnak egy évről-évre gazdagabb termést igérő tartománya lett. Mi gondolatainkat, mikor megszületnek, már a magunk nyelvén közölhetjük velünk együtt haladó pályatársakkal, elismerésre sőt jutalomra már itthon számíthatunk. De azért valljuk be őszintén, mi is arra a távolabb, de nagyobb s el nem évülő dicsőségre törekszünk, a mely Bolyainak adatott, mert tudjuk, hogy csak az az igazi tudomány, a mely világra szól; s azért, ha igazi tudósok és — a mint kell — jó magyarok akarunk lenni, úgy a tudomány zászlóját olyan magasra kell emelnünk, hogy azt hazánk határain túl is meglássák és megadhassák neki az illő tiszteletet.

Ez a mi eszményünk, ez valósúlt meg Bolyai alkotásával egyszer; ilyen teljes mértékben talán egyetlenszer.

Azért siettünk ma ide különösen mi, e hazában a mathematikai tudományok művelői, hogy a nagy Bolyai dicső emlékét s vele saját eszményeink diadalát ünnepeljük.

Engem a Bolyai tudományában jártasabb társaimmal együtt, a magyar tudományos akadémia küldött ide. Nem jöttünk üres kézzel, társam a főtitkár el fogja mondani, mivel járúl az akademia ahhoz, hogy ez a mai ünnep a jövőben is emlékezetes maradjon.

Én az egybegyülteknek üdvözletet hozok.

Nagyságos elnöklő rektor úr! Fogadja kérem szivesen ezt az üdvözletet. A közös nagy czélokra törekvő tudományos testületek kölcsönös ragaszkodásának tiszteletteljes megnyilatkozása ez, de örömujjongás is előrehaladásunk érzetében, mert látva azt, hogy hazánkban immár a Királyhágón innen és a Királyhágón túl is nagyrabecsülik és serényen művelik a tudományt, reményleni kezdjük, hogy a tudományos világban lehet még, lesz még valamikor egy nagy Magyarország!

Dr. Szily Kálmán, a Magyar Tud. Akadémia főtitkára kapcsolatosan a következő jelentést tette:

Bolyai János születése századik évfordulójának ünnepléséhez a Magyar Tudományos Akadémia azon határozatával járúl hozzá, hogy a halhatatlan tudósnak, valamint az ő mélyen gondolkozó atyjának és a tudományban mesterének emlékezetére, első ízben 1905-ben és azután minden ötödik évben a deczemberi összes ülésén, a megelőző öt évben bárhol és bármely nyelven megjelent legkiválóbb mathematikai vizsgálat szerzőjét, tekintetbe véve az illetőnek előbbi tudományos működését is, 10,000 korona »Bolyai-jutalom«-mal és éremmel tünteti ki. Az érem egyik oldalát a M. Tud. Akadémia és Budapest képe, másik oldalát magyar felírat diszíti.

Ha meghalt író munkája itéltetik legjobbnak, az elhunyt örököseinek adatik ki a jutalom.

A jutalom odaitélése évében a M. Tud. Akadémia III. osztálya legkésőbb márcziusi üléséből, két belső és két külső tagból álló bizottságot választ, mely október első felében, Budapesten egybegyűlve határoz. A bizottság saját kebeléből maga választja elnökét, ki a bizottságban szintén szavaz és szavazat-egyenlőség esetében szavazatával dönt. Ugyancsak a bizottság választja előadóját is, ki a bizottság határozatáról, a díjat odaitélő összes ülés számára, részletesen indokolt jelentést készit.

A bizottsági tagoknak esetleg szóba jöhető dolgozatai mind a bizottságnak határozatából, mind a jelentésből ki vannak zárva.

A külső tagok, kik a tanácskozásra hozzánk fáradnak és néhány napot nálunk töltenek, egyenként 1000 koronában részesülnek. Az előadói jelentés tiszteletdíja 300 korona.

A jelentés az Akadémiai Értesitőben jelenik meg; a Magy. Tud. Akadémia gondoskodik azonkivűl a jelentésnek külföldön is közzétételéről s a szövetségben álló akadémiák számára való megküldéséről.

A M. Tud. Akadémia III. osztálya ugyanez alkalomra a »Tentamen« második kötetének új kiadásából Bolyai János világhirű »Appendix«-ét 100 példányban a kolozsvári egyetem rendelkezésére bocsátotta, hogy mindazon tudományos intézeteknek és tudósoknak kedveskedhessék vele, kiknek a mai emlékünnep irományait meg fogja küldeni.

A budapesti kir. magyar tudomány-egyetem részéről dr. Fröhlich Izidor az elméleti természettan ny. r. tanára, a következő üdvözlő beszédet mondotta:

NAGYSÁGOS EGYETEMI RECTOR ÚR!

TEKINTETES EGYETEMI TANÁCS!

A budapesti kir. m. tudomány-egyetem nevében és megbízásából jöttünk el, hogy a kolozsvári testvér-egyetemet ezen nevezetes alkalomból szivünk mélyéből üdvözöljük és lélekemelő ünnepélyében részt vegyünk.

Büszkék vagyunk, hogy ily fényes gyülekezetben megjelenhettünk; de még nagyobb büszkeséggel tölt el az az érzelem, hogy egyetemünk kegyeletes hódolatát fejezhetjük ki azon ritka magyar tudósok egyikének emlékezete iránt, kik mostoha földi sorsuk daczára, lángelméjükkel az össztudomány igazi halhatatlanai közé emelkedtek.

Örömmel jelezhetjük, hogy egyetemünk tanszékeiről hirdetik Bolyai János szellemének fényes tanait s hogy tudomány-szomjas fiatal nemzedékünk tisztelettel és lelkesedéssel telik meg e nagy hazai mathematikusunk elévülhetetlen alkotásai iránt.

Bízunk benne, hogy e tündöklő példa még a jövő évszázadokba is veti éltető és serkentő fényét; bizunk benne, hogy e haza tudósai ezentúl is mindenkor felismerik és zsinormértékűl tartandják, miszerint teljes odaadás a tudomány iránt és lelkes, de cselekvő idealismus azok az eleven tényezők, melyek a magyar tudományosságot nagygyá és tiszteltté fogják tenni!

Adja a sors, hogy ez mielőbb, mennél nagyobb mértékben legyen meg!

S most a Nagyságos Rector Úr kegyes engedélyével átveszi tőlem a szót mathematikai kartársam.

A budapesti m. kir. tudomány-egyetem tanácsa és bölcsészeti kara nevében dr. Beke Manó, a mathematika ny. r. tanára:

Nagyságos Rector Úr!
Tekintetes Egyetemi Tanács!

Csatlakozva előttem szóló tisztelt Collegámhoz, a budapesti m. kir. tud. egyetem tanácsa és bölcsészeti kara megbízásából én is szívem mélyéből üdvözlöm a testvéregyetemet, hogy e fényes ünnepen alkalmat adott nekünk arra, hogy tudományos meggyőződésünkből eredő legmélyebb kegyeletünknek adhassuk kifejezését azon férfiú iránt, a ki lángelméjének isteni eredetű, nagy édes atyjától kifejlesztett fényével átvilágítva az euklidesi geometria egy nevezetes részét elborító kétezeresztendős ködön, a ki a tudományos alkotás ezen örök ideáljának minden zugát, átható éles szemével átkutatva, megtisztította attól a folttól, melyet előtte annyi élesb tapintatú kiváló mathematikus nem tudott eltávolítani, a ki merész kézzel lebbentette fel a térelmélet igazságait eltakaró fátyolt, melyhez még a legerősebbek is félve nyultak, mert évezredeken át erősen tartotta a geometria atyamesterének nagy tekintélye, sőt újabban a kőnigsbergi nagy philosophus egész rendszere. Kegyelettel adózunk annak a férfiunak, a ki, mint első rangú mathematikai lángész kikapcsolta az euklidesi geometria szoros lánczából a laza lánczszemet, jól tudva, hogy ezzel magát a lánczot még erősebbé teszi, a ki szétszedte a hatalmas tudományos épület alapköveit, nem hogy romboljon, hanem, hogy az új alapokon egy még hatalmasabb, még nagyobb, az egész előbbi alkotást magába záró uj épűletet alkosson.

Az uj alkotás a tudós világ örök csodálatára fennáll, a tűzpróbát minden oldalról kiállotta és minden kísérlet, mely gyöngítésére irányult, még erősebbé, még hatalmasabbá tette. Lángelméjű építészei között Bolyai mellett a mathematikai tudományok fejedelmei állanak, a kiket tudományos vizsgálataik legkülönfélébb útjai vezetnek el ehhez az épűlethez, hogy részint új meg új erősséggel, dísszel és ragyogással lássák el, részint szorosabban belekapcsolják a tudományos vizsgálatok egész rendszerébe és ezzel örök életet, s alkotójának örök dicsőséget biztosítsanak.

Nagy tudósaink iránti kegyeletünket a legméltóbb módon úgy tanusítjuk, ha iparkodunk beléhatolni szellemük birodalmába és az általuk fölszinre hozott kincseket, a mennyire lehetséges, közkincscsé teszszük, hogy a nagy szellem az emberi tudományos fejlődésnek nemzedékeken át állandó irányítója legyen. A kolozsvári testvéregyetem tanárai már régóta gondoskodnak arról, hogy a Bolyai iránti kegyelet ilyen, tudósokhoz a legeslegméltóbb formában nyilvánuljon. Keletkezése óta rendes időközökben mindig gondoskodott arról, hogy ezen eszmék elterjedjenek és a nem euklidikus geometria első terjesztői között foglalt helyet. Ebben a tekintetben mi is követjük példáját és vállvetett munkával bizonynyal elérjük, hogy a magyar tudományosság jövő bajnokai Bolyai szellemi alkotásai iránt való meleg érdeklődéssel és szeretettel foglalkoznak a mathematikai tudományok mindazon részeivel, melyekkel e vizsgálatok összeszövődnek és abból az emelkedett szempontból, melyre az absolut geometriai ismeretek helyezik: biztosabban és jobban fogják áttekinthetni a közönséges geometria birodalmát, melynek egész hazai ifjuságunk szellemi kiművelésében elsőrangú szerepe van s melynek minden tudományos fejlődésre közvetve, vagy közvetlenűl a legnagyobb fontossága van.

Igy válik, mint a nagy fiúnak nem kisebb atyja mondá Bolyai alkotása e hazának, e nemzetnek dicsőségére és Bolyai méltán élhetett abban a meggyőződésben, hogy »e dolog tisztázásával a tudomány valódi öregbítéséhez és ennélfogva az emberi sors emeléséhez a legfontosabb és legfényesebb adalékok egyikét szolgáltatta.«

Ez a mai ünnepély kell, hogy Bolyai János iránti kegyeletünk fokozása mellett egyúttal emelje a nemzeti önérzetet, a nemzeti öntudatot és ezzel a jövőbe vetett bízalmunkat és azt a mély meggyőződésünket, hogy ennek a nemzetnek, melynek fiai közűl daczára az egyéni, családi és társadalmi szerencsétlen viszonyainak Bolyai a mathematika egén tündöklő elsőrendű csillagok közé tudott emelkedni, az emberiség fejlődésében nemcsak politikai, nemcsak gazdasági, hanem szellemi hivatása is van, melyet szerencsésebb viszonyok között a culturalis factorok fokozódó együttműködésével bizonynyal be is fog tölteni. E meggyőzédés oly becses, oly felemelő, hogy e testvéregyetemnek, mint a nagy nemzeti meggyőződés életre keltőjének ujból legmelegebb köszönetet mondok.

A budapesti m. kir. József-műegyetem nevében dr. Rados Gusztáv a methematika ny. r. tanára:

NAGYSÁGOS REKTOR ÚR!

NAGYTEKINTETŰ EGYETEMI TANÁCS!

A magyar királyi József-műegyetem tanácsa örömmel és lelkesedéssel ragadja meg az alkalmat, hogy a kolozsvári tud.-egyetemnek, a hazai művelődés e nagyhivatású végvárának, Alma Materét a mai ünnepély alkalmából legmelegebben üdvözölje.

Ezen az ünnepen a kolozsvári egyetem tudós tanári kara kegyelettel, de büszkeséggel is emlékezik meg Kolozsvár egyik nagy szülöttének, Bolyai János születésének századik évfordulójáról; s méltán, mert Bolyai Jánost az ő örökbecsű műveiben nyilvánuló éles logikája, gazdag phantasiája, intuitiójának teremtő ereje már régen a mathematikai tudományok ama herosainak sorába emelték, a kiknek neve a tudomány-történet legdicsőbb lapjain tündöklik.

Bolyai János mitsem túlzott, a midőn nagy eszméinek megfogamzásakor a felfedezés mámorában így kiáltott fel: »új világot teremtettem«, mert a mit teremtett, az a geometriában uralkodott évezredes előitéleteknek véget vetvén, a mathematikai és bölcseleti kutatásnak megmérhetetlen új területet hodított.

A mai ünnep jelentősége messze túllépi a helyi, de még az országos ünnepek keretét is: a nemzetközi tudomány ünnepnapja ez és keblünket büszkeség dagasztja, hogy az ünnepelt édes hazánknak fia.

Talán különösnek tetszik, hogy a műegyetem tanárai, a gyakorlat emberei, ily lelkes örömmel veszik ki részüket a tisztán elméleti tudomány ünnepéből. Hiszen a gyakorlat örökzöld fája és az elmélet szürkesége közötti ellentét immár szálló igévé vált. Valójában ez az ellentét csak fictio, mert a gyakorlat és elmélet nemcsak hogy nem ellentétesek, hanem kölcsönösen kiegészítik egymást. Mi nagyon jól tudjuk, hogy tudós egyetemi tanárok dolgozó szobáiban és laboratoriumaiban teremtették meg azt az alapot, melyen a műegyetem tovább épít. Szellemi anyánk közös: egyazon alma mater, a ki legérettebb és legnemesebb gyümölcseit önzetlenűl nyújtja a gyakorlatnak, mig ez viszont az elméletet szolgálja és istápolja is, midőn a tudományt a való élettel egyesíti. Csak a munka megosztása különítette el útainkat, de él bennünk a származás vérközösségének tudata s e tudatból fakadó testvéri szeretet ösztönöz bennünket arra, hogy a mai ünnepen a kolozsvári egyetem alma materét azzal a régi felkiáltással üdvözöljük: vivat, crescat, floreat in aeternitatem!

Bolyai születése óta egy eredményekben gazdag és fényes század mult el; mi szívünk egész melegével kivánjuk, hogy e lángeszű tudós születés-évfordulójának megünneplése a kolozsvári Ferencz József tudományegyetem történetében sikereire épen olyan büszke század előhirnöke legyen! Lebegjen az ünnepelt szelleme, a tudományos kutatás, — a genialis alkotás szelleme, a kolozsvári tudományegyetem felett mindenha!

A bécsi cs. és kir. műszaki katonai Akadémia képviseletében Budisavljevič Emanuel alezredes:

EURE MAGNIFICENZ!
HOHER SENAT!

Die technische Militär-Akademie, die Nachfolgerin jener Ingenieur-Akademie, die zu ihren Schülern den genialen Bolyai zählen durfte, beglückwünscht durch ihre Vertreter die K. Franz Josefs-Universität zu der erhebenden Feier, gewidmet dem Andenken des grossen, unsterblichen Sohnes der ungarischen Nation.

Der Name Bolyai schlinge um die beiden Pflegestätten der Wissenschaft, die Universität und die technische Akademie, das unsichtbare und doch so feste Band der Sympathie, welcher Ausdruck gegeben sei durch den inneren und aufrichtigen Wunsch:

Stets blühe und gedeihe die Franz Josefs-Universität zur Freude und zum Ruhme des stolzen, edlen Vaterlandes.

A Mathematikai és Physikai Társulat nevében dr. Kürschák József, a geometria műegyetemi ny. rk. tanára:

NAGYSÁGOS RECTOR UR! NAGYTEKINTETŰ EGYETEMI TANÁCS! MÉLYEN TISZTELT ÜNNEPLŐ KÖZÖNSÉG!

Bolyai János születésének százéves emlékünnepén a Mathematikai és Physikai Társulat is szívből üdvözli a m. k. Ferencz József tudomány-egyetemet. A társulat különös örömmel látja, hogy az, mivel rövid fennállása óta szerény eszközökkel a nagy mathematikusnak emléke iránti kegyeletét kifejezte és az egyetem fényes ünnepélyének tényei mily szervesen egészítik ki egymást. Az egyetem ma emléktáblával ékesíti azt a házat, hol az absolut geometria lángelméjű írója született; a társulat 1894-ben sírkővel jelölte azt a hantot, mely alatt Bolyai Jánosnak teljes életén át az elismerésért hasztalanul szomjuhozó szíve örök nyugalomra talált. Az egyetem mai ünnepi kiadványa széles e világnak hírdeti, hogy a mathematika utolsó félszázados fejlődésében mily óriási szerepe jutott az absolut geometriának; társulatunk a tudomanyszomjas magyar olvasónak tette hozzáférhetővé Bolyai János remek Appendixét, midőn annak sikerült magyar fordítását kiadta. Bárha útjaink még sokszor találkoznának a hazai tudomány művelésében és sikereinek ünneplésében.

A marosvásárhelyi ev. ref. kollegium képviseltében Csiki Lajos kollegiumi igazgató:

NAGYSÁGOS RECTOR UR!
MÉLYEN TISZTELT EGYETEMI TANÁRI KAR!

Mint a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium küldötte örömmel ragadom meg az alkalmat, hogy

Elöljáróságunk és Tanárkarunk nevében őszinte köszönetemet tolmácsoljam a megtisztelő meghívásáért. Kollegiumunk résztvevése ezen lélekemelő ünnepélyen annál közvetlenebb, mivel Bolyai János kollegiumunk egykori nagyhirű tanárának, Bolyai Farkasnak fia és intézetünknek növendéke volt. Bolyai János Kolozsvárt pillantotta meg először a napvilágot, lánglelke azonban Maros-Vásárhelyt nyerte éltető táplálékát s földi porai is itt, az ev. ref. sírkertben találtak örök pihenőt.

Vajha ama fény és világosság, melyet e tüneményszerű lángész édes magyar hazánkra derített, tudományos életünk egén vezércsillag gyanánt mindörökre fennen lobogna!

Az Erdélyi Irodalmi Társaság üdvözletét dr. Szamosi János a classicaphilologia egyet. ny. r. tanára, a társulat alelnöke a következőkben tolmácsolta:

Az Erdélyi Irodalmi Társaság nagy örömmel és hálás köszönettel vette a m. kir. Ferencz József tudományegyetem meghívását Bolyai János ünnepélyére s a legnagyobb készséggel küldötte ki képviselőit és bízta meg ez idő szerint működő alelnökét azzal, hogy társulatunk érzelmeit e nagy jelentőségü ünnepélyen tolmácsolja.

Igaz ugyan, hogy társaságunk czélja első sorban a szépirodalom művelése s a tudományok eredményeinek szép, tetszetős alakban való s épen azért a művelt nagyközönség körében alkalmas terjesztése, de igen természetesen — mint nemzeti, magyar társaság nem lehet közönyös az egyetemes magyar tudományosság, nemzetünk nagyjai és dicsősége iránt.

Annál kevésbbé lehet közönyös akkor, a mikor oly nagyunkról van szó, a ki mint egy szak reformatora árasztotta be dicsőségével az egész tudományos világot, a kinek műve ma a világ minden művelt nyelvére lefordítva közkincs, a ki a magyar névnek, a magyar tudományosságnak hírt és nevet szerzett.

De Bolyai János ünnepén lehetetlen, hogy ne jusson eszünkbe a szintén nagy nevű apa Bolyai Farkas, a ki a mathesis mellett a szépirodalomnak is lelkes művelője volt, még pedig nem siker nélkűl és a kinek drámai műveiben az avult külső alatt sok mély, örök szép és valóban költői gondolat rejlik.

Végre ünnepeljük Bolyai Jánosban a költői lángészt is, mert valóban költők, költői lángelmék azok, a kik az emberiséget világra szóló találmányokkal, felfedezésekkel gazdagítják, a kik rendszerint az isteni szikra hatása alatt jutnak egy-egy ihletett pillanatban nagy eszméikhez.

Mindezeknél fogva az Erd. Irod. Társ. nevében kifejezem tiszteletünket, hódolatunkat a nagy Bolyai János dicsőült szellemének s kivánjuk, vajha a Bolyaiak felidézett szellemeinek hatása hazánkban s a tudományok e szent csarnokában a mathesisnek hivatott, buzgó és nagy művelőket lelkesítene!

Végűl Bedőházy János orsz. képviselő, a két Bolyai életírója, mint a ki két évtizeden át működött Bolyai János atyjának tanszékén, lendületes szónoklatban hódolt a nagy mathematikus emlékének.

A tartalomban és elragadó előadásban egymással vetélkedő szónoklatok láthatóan mély hatást gyakoroltak a közönségre, a mely mindannyiszor lelkesült éljenzéssel nyilvánította tetszését, az elnöklő rector pedig a következőleg adott kifejezést öszinte, meleg köszönetének:

Mélyen tisztelt Küldött Urak!

Méltóztassanak egyetemünk hálás köszönetét fogadni ünnepünkben való részvételükért, valamint az elhangzott lélekemelő felszólalásokért, a melyekkel ünnepünk fényét emelni, bensőségét gyarapítni kegyesek voltak. Fogadja különösen a Magyar Tudományos Akadémia mély köszönetünket, hogy a nagy férfiú világraható szelleméhez méltóan, az egész világ tudósainak megnyitott alapítványa kihírdetésére a mi ünnepünket itélte megfelelő alkalomnak; fogadja köszönetünket az Akadémia III. osztálya nagy értékű adományáért, a melylyel a legszebb módon kivánja elősegítni tudományos összeköttetéseinket. Midőn részünkről kész örömest teszek tanúságot arról, hogy nagybecsű megjelenésükkel szívünkbe a kedves visszaemlékezés magvait hintették el, ohajtom, hogy az ünnepelt nagy szellem emléke fakaszszon bő áldást mindnyájukban!

Kapcsolatosan jelentette a rector, hogy az ünnep alkalmából táviratban fejezte ki üdvözletét a göttingeni mathematikai társulat, valamint gróf Kuun Géza; levélben: a mathematikusok német egyesülete s a selmeczbányai Bányászati és Erdészeti Akadémia.

5*

Befejezésül az ifjúsági dalegyesület a király-hymnust énekelte, melynek elhangzása után szétosztatott a közönség között a mathematikai és természettudományi kar által ezen alkalomra kiadott: Libellus post saeculum quam Joannes Bolyai de Bolya anno MDCCCII. a. d. XVIII. Kalendas Januarias Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam eius immortalem ex consilio Ordinis Mathematicorum et Naturae Scrutatorum Regiae Litterarum Universitatis Hungariae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae edidus. Claudiopoli, MCMII. czímű emlékírat, a mely a Bolyai János absoluta geometriájára vonatkozó irodalomnak dr. Bonola Róberttől egybeállított repertoriumán és Bolyai Jánosnak atyjához intézett egyik levele hasonmásán kivűl magában foglalja dr. Schlesinger Lajos és dr. Stäckel Pál amaz értekezéseit, a melyek magyar fordításban alább következnek.

Az ünnepre számos intézet és társulat küldötte el a távolból képviselőit. A Magyar Tudományos Akadémia részéről megjelentek: Br. Eötvös Loránd elnök, dr. Szily Kálmán főtitkár, dr. Réthy Mór rendes, dr. Kürschák József és dr. Tötössy Béla levelező tagok; a budapesti m. kir. tudomány egyetem és bölcsészeti karától: dr. Fröhlich Izidor és dr. Beke Manó ny. r. tanárok; a József-műegyetem képviseletében: dr. Réthy Mór, dr. Rados Gusztáv, dr. Tötössy Béla és dr. Kürschák József ny. r. tanárok; a bécsi cs. és kir. műszaki katonai Akadémiától: Budisavljević Emanuel alezredes, a felső mennyiségtan tanára; Császár Andor III. Bartha Károly II. és Vikár Kálmán I. éves akad. növendékekkel; a Mathematikai és Physikai Társulattól: dr. Kürschák József; a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium képviseletében Csiki Lajos igazgató, Páll Károly tanár; az orsz. középiskolai tanáregyesülettől dr. Waldapfel János, dr. Lóky Béla főgymn. tanár és Bournáz János felső leányisk. tanár; az enyedi Bethlen-Kollegium részéről Fogarasi Béla igazgató. Továbbá: Bedőházy János orsz. képviselő, Bolyai Dénes, az ünnepelt fia, Koncz József marosvásárhelyi nyug. tanár, dr. Tóth Lajos közokt. minist. osztálytanácsos. A helybeliek közül: az erdélyi ev. ref. egyház képviseletében: Kenessey Béla, a ref. theol. facultas igazgatója, Nagy Károly theol. tanár; az unitarius egyház Képviselő Tanácsa részéről: Ferencz József püspök, Nagy Lajos ny. tanár; Kolozsvármegye képviseletében gr. Béldy Ákos főispán, Dózsa Endre alispán; a kolozsvári kir. itélő táblától: Fekete Gábor elnök és Heppes Miklós tanácselnök; a katonaság részéről: Palkovics József ny. altábornagy, egykor tanár a bécsi cs. és kir. műszaki katonai Akadémián, Sauter Gáspár honvédezredes, Deák Zsigmond honvéd alezredes, Prodanovics István alezredes, dr. Turcsa János törzsorvos, a két utóbbi a cs. és kir. 51. ezred parancsnokságának képviseletében, Haubert Kamillo őrnagy és Raics Károly százados; Kolozsvár sz. kir.

város tanácsa részéről: Szvacsina Géza polgármester, Salamon Antal, Fekete Nagy Béla, Ehrlinger Lajos tanácsosok, dr. Esterházy László főjegyző; Russel Károly a Kalazantinum, Boross György az unit. theologia igazgatója; az ev. ref. főgymnasium képviseletében: dr. Török István igazgató, dr. Imre Sándor tanár; a kath. főgymnasium részéről: dr. Erdélyi Károly igazgató, Kozár Ferencz házfőnök, dr. Lóky Béla tanár; az unitárius gymnasiumáról: Gáll Kelemen igazgató; az Erdélyi Irodalmi Társaságtól: dr. Szamosi János alelnök, dr. Csengeri János titkár és Hóry Béla r. tag; a kir. mérnöki hivatalt képviselte Gere Kálmán főmérnök, a kulturmérnöki hivatalt Brutsi László kir. mérnök; a kiváltságos kolozsvári kereskedő társulatot Tamási István alelnök és dr. Gámán József jegyző, a magyar-franczia biztosító részvénytársaság erdélyrészi vezérügynökségét Csermák Gyula.

Az emlékkönyv kiosztása után a rector felhívására az ünneplő közönség Bolyai Jánosnak ünnepi díszt öltött szülőházához* vonult, hogy jelen legyen a mathematikai és természettudományi kar által e ház Deák Ferencz-utcza felőli homlokzatán fölállított emléktáblának a városi hatóság oltalmába leendő átadásánál.

A helyszinén dr. Farkas Gyula, a mathematikai és természettudományi kar dékánja Sala-

* Tivoli-utcza 1. sz. a., jelenleg a Kolozsvári Kiváltságos Kereskedő Társulaté, a mely az épületet a legnagyobb előzékenységgel engedte át az ünnep czéljaira

mon Antal városi tanácsoshoz, mint Kolozsvár városa tanácsának kiküldöttéhez a következő beszédet intézte:

Tekintetes Tanácsos Ur!

A magyar kir. Ferencz József Tudományegyetem math. és termt. kara már ezelőtt 3 évvel elhatározta, hogy Bolyai János szülőházát felkutatja és emléktáblával jelöli meg. Kutatásában nemes Városunk tek. Tanácsa is támogatta.

Az első nyomok más házhoz vezettek, a mely a Deák F. utcza tulsó oldalán Betegh Bálint birtokos tulajdona. Bolyai János születésekor Bodor Pálnak, az erdélyi cassa provincialis ellenőrének a háza állott ott.

Azonban egyik tanártársam megállapította, hogy ebben a házban született Bolyai Jánosunk, a mely jelenleg a helybeli kiváltságos Kereskedő Társulaté, akkor pedig Bolyai János anyai nagyatyjának, Benkő Józsefnek a birtokában volt.

Ennek a kiderítése után a Kereskedő Társulat igen szives engedelméből, az emléktábla fölállítását azonnal foganatosította a kar.

A táblán Bolyai Jánost magyar Euklidesnek mondja, mert geometriának az alkotó mestere volt, mint Euklides. Atyját Bolyai Farkast is megnevezzük a táblán, mert, mint a Tentamen mély gondolkozású szerzője, megérdemli ezt, mihez járul, hogy atya volt ő János mathematikai tehetségének fejlesztésében is.

Abban a biztos tudatban fordulok most a tek. Tanácsos urhoz, hogy Kolozsvár szab. kir. város érdemes közönsége Bolyai János itt születésének emlékét mindig becses kincse gyanánt fogja őrizni s kérem, hogy az emlék-követ a tekintetes városi hatóság oltalmába fogadni méltóztassék.

Salamon Antal lelkes szavak kiséretében fogadta az emléktáblát a város oltalmába, igérve, hogy a város a legnagyobb kegyelettel fogja megőrizni.

Most a Magyar Tudományos Akadémia, a budapesti kir. magyar Tudományegyetem, a Mathematikai és Physikai Társulat, Kolozsvár sz. kir. város közönsége és a kolozsvári m. kir. Ferencz József Tudományegyetem koszorúit helyezték el az emléktáblára, a melynek szövege a következő:

„Az 1802. év 12. havának 15. napján, itt született Bolyai **Bolyai János,** a magyar Euklides, Bolyai Bolyai Farkasnak, a Tentamen mély gondolkozású szerzőjének fia. Minek az emlékezetére száz év multán a Ferencz József Tudományegyetem mathematikai és természettudományi kara állitá e követ.“

IV.

AZ ABSZOLUT GEOMETRIÁNAK A KOMPLEX VÁLTOZÓ FÜGGVÉNYEINEK ELMÉLETÉRE VALÓ NÉMELY ALKALMAZÁSÁRÓL.

IRTA

SCHLESINGER LAJOS
bölcsészetdoktor, a felsőbb mennyiségtan ny. r. tanára, a Magyar Tudományos Akademia levelező tagja stb.

A latin szövegből magyarra forditotta Dr. *Habán Mihály.*

Bevezetés.

Ha egy $x=f(\eta)$ egyértékű és periodikus függvénynek

$$\eta=p+q\sqrt{-1}$$

független változóját egy Σ *euklidesi* sík pontjaival ábrázoljuk, akkor az η változó egy ω periodussal való növekedésének a sík maga-magába való párhuzamos eltolása felel meg. Az $f(\eta)$ függvénynek periodiczitása tehát geometriailag jellemezhető az által, hogy ezen függvény értékét az *euklidesi* sík bizonyos párhuzamos eltolásai nem változtatják.

Ismeretes, hogy az *euklidesi* sík legáltalánosabb eltolását a

$$\zeta=e^{\vartheta\sqrt{-1}}(\eta+\omega)$$

képlet fejezi ki, melyben ϑ egy realis szöget, ω pedig egy tetszőleges mennyiséget jelent, s a mely eltolás az $\eta+\omega$ párhuzamos eltolásból és ϑ szög alatt való forgatásból tehető össze. Ennek alapján nem nehéz megalkotni oly egyértékű függvényeket, melyek a Σ siknak bizonyos, párhuzamos eltolásokból és forgatásokból összetett eltolásai mellett értéküket nem változtatják meg. Ezen függvények biperiodikus függvények segélyével előállíthatók s e mellett mutatják azt is, hogy a komplex változó azon egyértékü függvényeinek osztályát, melyek oly tulajdonságuak, hogy az *euklidesi* sík bizonyos eltolásai mellett nem változnak, a biperiodikus függvények osztálya lényegében kimeríti.

A komplex változó ama egyértékű függvényeinek felkeresése által, melyek az anti-euklidesi sík eltolásainál ugyanoly szerepet játszanak, mint a biperiodikus függvények az *euklidesi* sík eltolásainál, egy oly függvényosztályhoz jutunk, mely az egy változós függvények körében a biperiodikus függvények osztályának természetes általánosítása gyanánt tekintendő.

Hogy a komplex mennyiségek analizise és az abszolut geometria, különösen az abszolut sik, a hypersphaerak, sphaerak és parasphaerak geometriája között összefüggés létezik, azt már

Bolyai János,

az abszolut geometriának megalkotója, kinek emlékezetére ez értekezés megíratott, felfedezte.[1] A komplex mennyiségek és az abszolut geometria között levő ama vonatkozások azonban, melyek a fentebb említett függvényosztály elméletére nézve nagy fontossággal bírnak, későbbi kutatók által, kiknek sorából különösen *Beltrami* és *Poincaré,* emelkédnek ki, lettek kifejtve. Ugyanis ezen férfiak

[1] V. ö. erre vonatkozólag a *Stäckel* által *Bolyai J.* hagyatékából kiadott „Responsio“ 9—11 §§-ait (Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, XVI. köt. 288 l. s köv.) és az ugyancsak *Stäckel* által kiadott jegyzeteket (u. o. XVIII. köt. 256 l. s köv.)

eljárása szerint egy *Bolyai*-féle sík pontjaihoz azon komplex értékek sokaságát lehet egyértékűleg kijelölni, melyekre nézve

$$1+c(p^2+q^2)\geqq 0,$$

hol c a *Bolyai* által az »Appendix«-ben i-vel jelölt mennyiséggel, mely a *Bolyai*-féle sík természetét határozza meg, a $ci^2=-1$ egyenlet által van összekapcsolva. Ennélfogva azon

$$\eta=p+q\sqrt{-1}$$

komplex értékek, melyekre nézve

$$1+c(p^2+q^2)=0,$$

a *Bolyai*-féle sík végtelen távoli pontjainak felelnek meg; ezen sík magamagába való eltolásait a

$$(1) \qquad \xi=\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$$

egységnyi determinanssal biró projektiv substitutiók fejezik ki, mely substitutiók az

$$1+c(p^2+q^2)$$

kifejezést egy pozitiv tényezőtől eltekintve önmagába transformálják.

Az η-nak azon egyértékű függvényei, melyek a *Bolyai*-féle sík bizonyos eltolásai mellett értéküket nem változtatják meg, az η-nak csak az

$$1+c(p^2+q^2)>0$$

egyenlőtlenséget kielégítő értékei mellett vannak meghatározva s ugyanazon értékeket veszik fel, hogyha η-ra bizonyos az (1) alakkal biró substitutiókat alkalmazzuk.

Ezen függvényeknek egy speczialis esetét (az úgynevezett modul-függvényt) maga a biperiodikus függvényeknek elmélete szolgáltatja; az általános elméletnek megalapítója *Poincaré*, ki ezen függvényeket *Fuchs*-féle függvényeknek nevezte, s ki több egykorú mathematikussal egyetemben az elméletet tovább fejlesztette. A *Fuchs*-féle függvények kiváló fontossága ama körűlményben rejlik, hogy úgy az érdekes analytikai tulajdonságok gazdagságával bővelkednek, valamint abban, hogy két komplex változó között fennálló bizonyos többértékű reláczióknak egyértékűekké való átalakítására alkalmazhatók.

A hogyan ugyanis a helynek egyértékű függvényei a *Riemann* féle felületen, ha az egyszeresen összefüggő, egy segédváltozónak raczionalis, ha háromszorosan összefüggő, annak egyértékű és biperiodikus függvényeiként állíthatók elő, ugyanoly módon a $(2p+1)$-szeresen összefüggő *Riemann*-féle felületen, ha $p>1$, a helynek függvényei egy segéd-változó egyértékű *Fuchs*-féle függvényeiként állíthatók elő.

Ezen előállítás lehetővé teszi, hogy ily (2p+1)-szeresen összefüggő felületek geometriai szerkezetébe bepillantsunk, főleg pedig világosan mutatja, hogy egyfelől a folytonos deformácziónál, másfelől a conformis leképezésnél mily invarians tulajdonságok lépnek fel.

Hogy azon értékeknek, melyeket a *Fuchs*-féle függvény független változója felvehet, a *Bolyai*-féle síkon való ábrázolása mily szoros összefüggésben van ezen függvények elméletével, az kitünik abból, hogy ez által nemcsak azon analogiákat ismerhetjük meg, melyek ezen és az *euklidesi* sík eltolásainál nem változó függvények között fennállanak, hanem levezethetjük kizárólag a *Fuchs*-féle függvényekre nézve sajátos tulajdonságokat is. Ezért mondá *Poincaré:*[1] »Cette terminologie (t. i. az abszolut geometriának) m'a rendu de grands services dans mes recherches«.

Ama *Fuchs*-féle függvények, milyenekről e helyen említést tettünk (*Poincaré* jelölése szerint: az első, második, hatodik család), két irányban általánosíthatók. Először elhagyható azon feltétel, hogy a függvények a változónak csak azon értékei mellett létezzenek, melyek a *Bolyai* féle sík valós pontjainak felelnek meg, továbbá megszüntethető azon megszorítás, hogy a projectiv substitutiók a *Bolyai*-féle síknak maga-magába való eltolásait állítják elő.

Azon függvények elméletére, melyekre nézve az utóbbb említett megszorítás nem áll, s a melyeket *Poincaré Klein*-féle függvényeknek nevezett, az abszolut geometria szintén használhatóvá tehető, az által hogy a komplex változó tetszőleges projektiv substitutioit egy három dimenziós *Bolyai* féle tér eltolásaiként felfogjuk.[2]

A következőkben arra fogunk törekedni, hogy az abszolut geometriának az itt érintett függvények elméletére való alkalmazásait bemutassuk, midőn is bizonyos geometriai problemákból kiindúlva a *Fuchs*-féle függvények (első, második, hatodik családjának) és bizonyos, ezekkel rokon függvények elméletének inkább szintétikus úton való felépítését

[1] Acta Mathematica, I köt. 8 old.

[2] V. ö. pl. *Poincaré*, Acta Mathematica, III. köt.

fogjuk röviden vázolni. Az említett általános függvényeknek, melyek projektiv substitutiók alkalmazását engedik meg, elméletét, tekintettel ezen értekezés czélja által kijelölt határaira, teljesen mellőzzük.

I.

Az „analysis situs"-ra vonatkozó vizsgálatok.

Riemann-nak az érdeme, hogy felismertük, miszerint bizonyos analitikai viszonylatok geometriai szemléleténél a geometriai alakzatoknak nemcsak a méretre vonatkozó tulajdonságai bírnak nagy fontossággal, hanem azok is, melyekben csak hely- és alak-viszonyokról van szó,[1] melyek tehát — mint *Listing*[2] mondja — nem a mennyiségre és a kiterjedés nagyságára, hanem az elrendezés és elhelyezés módjára vonatkoznak. A geometriai alakzatok ezen tulajdonságairól szóló tant egy, *Leibnitz*[3] által bevezetett terminussal, *„analysis situs"*-nak nevezzük. A felületeknek az analysis situsra vonatkozó tulajdonságaival *Bolyai* János is foglalkozott. Terjedelmes kézíratában, melyet életének utolsó éveiben készített s mely *„Raumlehre"* czímet visel, egyes jegyzetek találhatók, melyeket *Stäckel,* ki ezen kézíratot a hátrahagyott íratok között megtalálta, velem közölni szíves volt.

[1] *Riemann*, Opera Mathematica (Lipcse, 1890.) 91 l.

[2] Census räumlicher Complexe (Göttinga, 1862.) 13 l.

[3] *Listing* a „Topologia előtanúlmányai" (Göttinger Studien, 1847, I. rész) második fejezetében így idéz: „je croy, qu'il nous faut, encor une autre analyse proprement géometrique . . . qui nous exprime directement *situm*, comme l'Algèbre exprime *magnitudinem*".

»Egyszerű görbe, pályája az olyan pontnak, mely egy már elhagyott helyre többé nem lép, de a kiindulási helyre visszatér«. Az egyszerű felületet hasonló módon akarván definiálni, nehézségek merűlnek fel. »Egy tetszőleges felületen tetszőleges számú lyukat lehet kiszurni s az ott hozzáillesztett csöveket páronként egyesíteni. Ilyen a legáltalánosabb egyszerű felület«. Erre vonatkozólag a margón ezen megjegyzés van odavetve: »A bizonyítás keresendő«, ellenben egy másik jegyzet előírja, hogy »az egyszerű felületeknek különböző fajai felsorolandók«. Az egyszerű felületeknek különböző fajainak *Bolyai* által adott megkülönböztetése a két dimenziós sokaságnak az analysis situs szempontjából való osztályozásának lényegét tényleg megadja.

Ha ugyanis gondolunk magunknak egy r görbe által határolt F_r sík felületrészt, mely $2p$ lyukkal van ellátva s ezeket páronként egymásba nem fonódó csövek által összekötjük, akkor egy ugyancsak r görbe által határolt $F_{r,p}$ felületet nyerünk, melynek *Riemann* értelmezése szerint[1] az összefüggési száma $2p+r$. Ha nem az r görbe által határolt F_r felület részből, hanem egy zárt felületből, pl. egy gömbből akarunk kiindulni, akkor szükséges, hogy azt, mint *Riemann* és *Listing* tette, egy pont kiszúrásával egy görbe által határolt felületté gondoljuk átalakítva, tehát egy F_0 zárt felület mindig egy határoló görbével biró F_1 felülettel helyettesítendő. Azon felület, mely $2p$ lyúk kiszúrása s ezeknek

[1] Mathematische Werke, 92. l. s köv.

páronként való összekapcsolása által keletkezik, semmiben sem különbözik azon felülettől, melyet *Klein F.*[1] p-ed rangú normálfelület gyanánt bevezetett. Általánosan az $F_{r,p}$ felületet r görbe által határolt s $(2p+r)$-szeresen összefüggő *Bolyai*-féle *normálfelület*-nek fogjuk nevezni. Már most *Bolyai* azt mondja, hogy »ezen normálfelület a legáltalánosabb egyszerű felület«, a mi következőképen értendő.

Legyen általában M_2 egy két dimenziós sokaság, mely egy tetszőleges dimenzióval bíró *euklidesi* térben foglaltatik, mely tehát ily egyenletek által:

$$x_k = \Theta_k(u, v) \qquad (k = 1, 2, \ldots . n) \tag{1}$$

állítható elő, hol a Θ_k-k az u, v két realis változónak analytikus függvényei és az $x_1, x_2 \ldots . x_n$ az *euklidesi* térnek oly koordinátái, melyek által a ds ivelem négyzete

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots . + dx_n^2$$

alakban fejeztetik ki. Ekkor az M_2 sokaság ívelemének négyzetét a du, dv differencziáloknak egy pozitiv definita formája:

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{2}$$

szolgáltatja.

Az M_2 sokaság teljes meghatározásához az (1) egyenleten kivűl még bizonyos egyenlőtlenségekre is szükség van. Ezenfelül, hogy rövidebben szól-

[1] Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale (Lipcse, 1882), 26. l.; V. ö. *Clifford*, Proceedings of the London Math. Soc. VIII. köt. (1877).

hassunk, mindig feltesszük, hogy a vizsgálandó sokaság *bilateralis* a *Poincaré*[1] értelmezése szerint.

Ha pedig van nekünk két oly két dimenziós sokaságunk, melyeknek összes pontjai egymásra kölcsönösen úgy vonatkoztathatók, hogy az egyik sokaság minden egyes görbéjének, a másiknak is egy görbéje felel meg és hogy a megfelelő görbék egyidejűleg folytonosak, végesek avagy végtelenek, akkor a két sokaságot *Poincaré*[2] szerint *homoeomorph*-nak mondjuk. Homoeomorph sokaságok az analysis situs szempontjából aequivalenseknek tekinthetők.

Jordan-nak egy tétele[3] szerint a szükséges és elegendő feltétel arra nézve, hogy két sokaság M és M' homoeomorph legyen, abban áll, hogy

1. a határoló görbéknek száma ugyanaz legyen és hogy az egyik sokaság határoló görbéi a másikának a folytonosság törvénye szerint megfeleljenek;
2. hogy összefüggési számuk ugyanaz legyen.

Ebből következik, hogy minden r határoló görbével bíró m-szeresen összefüggő bilateralis sokaság egy $F_{r,\frac{m-r}{2}}$ *Bolyai*-féle normálfelülettel (az $m-r$ különbség mindig páros szám) homoeomorph, úgy, hogy tehát a *Bolyai*-féle normálfelület az analysis situs szempontjából tényleg a legáltalánosabb m-szeresen összefüggő, r határoló görbével biró sokaság repraesentánsaként tekinthető. Mivel feltételezzük, hogy az M_2 egy n dimenziós *euklidesi* térben fekszik,

[1] Analysis Situs, Journal de l'École Polytechnique, II. series, I. fasc., 1895. 27. l.

[2] V. ö. Analysis situs, etc. 9. l.

[3] Journal de Mathématiques (Liouville), II. ser., XI. köt., v. ö *Dyck*, Mathem. Annal. XXXII. köt., 485. l., *Poincaré*, i. h. 70. l.

mondhatjuk, hogy M_2 az *euklidesi* téren belűl folytonos deformáczióval egy ugyanezen térben gondolandó Bolyai-féle normálfelületbe vihető át. Ennek megvizsgálása czéljából egy $F_{r,p}$ normálfelületből fogunk kiindúlni, melynek r határoló görbéjét $a_1, \ldots, a_r$, a csöveket pedig $R_1, \ldots, R_p$ által jelöljük. Az a_r határoló görbét kizárt pontnak (trema) fogjuk tekinteni, így tehát az $r=1$ esetben egy zárt felületet nyerünk.

Ezen normálfelületet a következő metszeti rendszerrel egyszerűen összefüggő felületté alakítjuk:

Először az a_r pontból kiindulva C_k, D_k $(k=1,2,\ldots,p)$ metszeteket helyezünk el, úgy, hogy C_k az R_k csövet hosszában felhasítja, D_k pedig a nélkül, hogy C_k-nak az a_r-től különböző bármily pontját érintené, az R_k körűl vezettetik; azután az $a_1, \ldots, a_{r-1}$ határoló görbék egy-egy pontját a_r-el $l_1, \ldots, l_{r-1}$ metszetek által összekötjük. Az összes metszeteket gondoljuk egymást nem metsző, folytonos görbék menetében fektetve, mely görbék olyanok legyenek, hogy az irány azoknak csakis végső pontjaiban szenvedjen folytonosság szakadást. Czélszerű berendezésnél az így elhelyezett metszetek az $F_{r,p}$ felületet egyszerűen összefüggő $\overline{F}_{r,p}$ felületté alakítják át, melynek határoló görbéit az összes

$$C_k, D_k \qquad (k=1,2,\ldots,p),$$
$$l_\lambda \qquad (\lambda=1,2,\ldots,r-1)$$

metszetek két-két partja képezi. Ha a határoló görbét úgy futjuk be, hogy az $F_{r,p}$ felület jobb kéz felől maradjon, akkor l_λ-nak azon partját, melyet előbb érintünk negativnak (l_λ^-), a másikat pedig pozitivnak (l_λ^+) jelöljük meg. A C_k, D_k metszetek partjainak jelölési módját, valamint azok sorrendjét úgy határozzuk meg, hogy $\bar{F}_{r,p}$ felület határának pozitiv irányban (azaz úgy, hogy a felület balfelől maradjon) való befutásánál a metszetek partjai ezen sorrendben:

$$l_{r-1}^-, l_{r-1}^+, \ldots, l_1^- l_1^+ C_1^+ D_1^+ C_1^- D_1^-, \ldots, C_p^+ D_p^+ C_p^- D_p^-$$

következnek egymásután.[1]

Gondoljunk már most magunknak egy akár sík, akár görbült sokaságban oly felületrészt, melyben egy egyszerűen összefüggő s $4p+2(r-1)$ oldallal bíró $\Phi_{r,p}$ polygon fekszik. Ennek oldalai mind folytonos, különben tetszőleges görbék legyenek. Azon pontok, melyekben két egymás után következő görbe érintkezik, a polygon szögpontjait képezik. Bármely szögpontból kiindulva s a pozitiv irányt szemmel tartva fussuk be a $\Phi_{r,p}$ határát és az oldalakat jelöljük meg a sorrendnek megfelelőleg

$$s_{r-1}^-, s_{r-1}^+, \ldots, s_1^- s_1^+ \gamma_1^+ \delta_1^+ \gamma_1^- \delta_1^-, \ldots, \gamma_p^+ \delta_p^+ \gamma_p^- \delta_p^-$$

betűkkel.

Ezen oldalak mellé rendeljük az egyszerűen összefüggő $\bar{F}_{r,p}$ felület határvonalának egyes folytonos részeit oly módon, hogy az l_λ metszet l_λ^- l_λ^+ partjai az s_λ^- s_λ^+ oldalaknak, a C_k metszet C_k^+ C_k^- partjai a γ_k^+ γ_k^- oldalaknak, a D_k metszet D_k^+ D_k^- partjai a δ_k^+ δ_k^- oldalaknak feleljenek meg. Ebből következik, hogy az $\bar{F}_{r,p}$ felület a $\Phi_{r,p}$ polygonnal homoeomorph.

[1] V. ö. *Klein*, Mathematische Annalen, XXI. köt., 183. l. s köv.

Poincaré szerint[1] azt mondjuk, hogy a polygon két oldala *konjugált*, ha azok az $\overline{F}_{r,p}$ egy és ugyanazon metszete két partjának felelnek meg, a polygon azon szögpontjainak rendszere pedig, melyek az $F_{r,p}$ egy és ugyanazon pontjának felelnek meg, *cyklust* alkot, tehát mindegyik λ_i szögpont, hol az $s_i^- s_i^+$ $(i=1, 2, \ldots, r-1)$ konjugált oldalak érintkeznek, maga-magában alkot egy cyklust, ellenben a többi szögpontok, melyek mind az $F_{r,p}$ a_r pontjának felelnek meg, együttvéve képeznek egy cyklust. Ezen szögpontokat

$$\lambda_r^{(i)} \qquad (i=1, 2, \ldots, 4p+(r-1))$$

betűkkel jelöljük meg és pedig úgy, hogy az s_1-nak a λ_1-től különböző végpontját $\lambda_r^{(1)}$-rel jelöljük s a többi $\lambda_r^{(i)}$ a növekedő i számmal megállapított sorrendben következik egymásután a polygon határának negativ irányban való befutásánál. A $\Phi_{r,p}$ szögpontjainak cyklusokba való elrendezésére nézve érvényes a következő *Poincaré* adta szabály,[2] mely a $\Phi_{r,p}$ polygon és az $F_{r,p}$ felület között fennálló összefüggéstől független. Bármely szögpontból kiindúlva a pozitiv irány megtartása mellett, fussuk be a belőle kiinduló oldalt, azután ennek konjugáltját, majd a következő végpont, azután az ebből kiinduló oldalt, ennek konjugáltját s a következő végpontot és így tovább mindaddig, mig a kiindulási szögponthoz vissza nem térünk; azon szögpontok, melyeken ily módon keresztűlhaladunk, együtt egy cyklust alkotnak.

[1] I. m. 46. l. s köv.
[2] Acta Mathematica, I. köt., 20, 21. l.

Ezen módszer felhasználásával minden $(2p+r)$-szeresen összefüggő, r görbével határolt M_2 sokasághoz egy a $\Phi_{r,p}$ természetével biró polygont jelölhetünk ki, mely polygon az alkalmas metszetekkel egyszerűen összefüggővé változtatott sokasággal homoeomorph és az M_2-nek az analysis situs szempontjából való meghatározásához teljesen elegendő.

Fordítva legyen adva egy tetszőleges sokaságnak egyszerűen összefüggő részén egy a $\Phi_{r,p}$ természetével biró polygon. Ezen $\Phi_{r,p}$ polygont egy oly folytonos deformacziónak vessük alá (azon *euklidesi* téren belül, melyben a polygon foglaltatik), mely deformaczió által két-két konjugált oldala kongruens (azaz az *euklidesi* tér eltolásai által egymásba átvihető) görbeivekké alakíttatik át. Az így keletkező polygont nevezzük $\Phi'_{r,p}$-nek. Azután másodizben úgy gondoljuk deformálva, hogy a kongruens oldalpárok végtelen közel jussanak egymáshoz, ezen sokaságot nevezzük $\Phi''_{r,p}$-nek. Végűl a conjugált oldalpárok összeforrasztása által egy $\Phi'''_{r,p}$ sokasághoz jutunk, mely, mivel a λ_i végpontoknak megfelelő α_i helyeken és a $\lambda_r^{(i)}$ szögpöntök egyesítése által keletkező α_r helyen singularis pontokkal (tremákkal) van ellátva, egy $(2p+r)$-szeresen összefüggő, r kizárt pont által határolt sokaság. Az $a_1, \ldots, a_r$ pontokat, melyek a felület határát képezik, bármily határoló görbékké gondolhatjuk nagyobbítva, mi által közvetlenül egy *Bolyai*-féle normálfelületet nyerünk, mely $2p+r-1$ metszet által egyszerüen összefüggő sokaságba alakítható át. Ezen felület a $\Phi_{r,p}$ polygonnal, melyből kiindultunk, homoeomorph.

Ebből következik, hogy minden a $\Phi_{r,p}$ természetével biró polygon az analysis situs szempontjából meghatároz egy $(2p+r)$-szeresen összefüggő, r görbe által határolt sokaságot.

A $\Phi_{r,p}$ polygon ezenkivül sokféleképen transformálható. A polygont pl. tetszőleges a polygonból ki nem lépő, sem önmagukat, sem egymást nem metsző görbék által, melyek egy szögpontból kiindúlva, a többiekhez haladnak, $4p+2r-5$ háromszögalakú részre osztván fel, a polygonnak két oldala által határolt részek valamelyike, mondjuk τ, eltávolítható s egy vele homoeomorph résszel helyettesíthető, mely a polygonhoz azon oldala mentén illesztendő, mely a τ határát képező oldalak valamelyikéhez konjugált. Ezen eljárás akárhányszor ismételhető. Az ily módon keletkezett $\Phi_{r,p}$ polygon ugyancsak egy egyszerűen összefüggő sokasággal homoeomorph, mely a $(2p+r)$-szeresen összefüggő, r görbe által határolt sokaságból alkalmasan választott metszet rendszer alkalmazásával keletkezhetik. Hogy a $\Phi_{r,p}$ polygonnak, melynek oldalai páronként szintén kongruensek, szögpontjait mi módon kell összetenni, hogy cyklusokat nyerjünk, az következik *Poincaré*-nak előbb említett szabályából. A $\Phi_{r,p}$-ről azt mondjuk, hogy az a $\Phi_{r,p}$-ből az analysis situs szempontjából megengedett változtatások által jön létre.

Vizsgáljuk most mindazon zárt útak összeségét, melyeket egy (u_0, v_0) koordinátákkal biró P_0 pont az $F_{r,p}$ felületen befuthat. Minden zárt utat, melyet a P_0 pont a felületen leír, egy az ezen pontra alkalmazott operáczió gyanánt lehet felfogni megállapodván abban, hogy két oly út, melyek az $F_{r,p}$-n belül folytonos deformáczió által egymásba vihetők át, aequivalenseknek, tehát ugyanazon operáczióhoz tartozóknak tekintendők. Azon utakhoz, melyek egy az $F_{r,p}$-n belül fekvő pontba húzhatók össze, vagy a mi ugyanaz, melyek már magukban az $F_{r,p}$ egy bizonyos két dimenziós részének teljes határát képezik, az identikus operáczió jelölhető ki.

Legyen továbbá P_1 a felületnek P_0-tól különböző pontja s vegyük szemügyre a P_0-tól P_1-ig vezető következő három utat:

$$P_0 A P_1, \quad B_0 B P_1, \quad P_0 C P_1,$$

akkor a $P_0 A P_1 C P_0$ utat a $P_0 A P_1 B P_0$ és $P_0 B P_1 C P_0$ utakból *összetett*-nek mondjuk, hol is az összetevőknek sorrendje nem változtatható.[1]

Ha a $P_0 A P_1 C P_0$ út egy pontba összehúzható, akkor a $P_0 A P_1 B P_0$ és $P_0 B P_1 C P_0$ utakat *ellentéteseknek* nevezzük, ekkor ugyanis a $P_0 A P_1 C P_0$ az ellentétes irányban befutott $P_0 B P_1 C P_0$ uttal aequivalens.

Ha egy W zárt útnak az S operatió, egy másik W' zárt útnak az S' operatió felel meg, akkor a W és W'-ből összetett utnak az S és S'-ből összetett operatió, a W ellentétes útjának az S invers operatiója felel meg, ennélfogva az összesége mindazon S operatióknak, melyek a P_0 pont által az $F_{r,p}$ felületen leírható összes zárt görbéknek felelnek

[1] V. ö. *Poincaré* i. h. 62 l.

meg, egy *megszámlálható G csoportot* képez, melyben az operatiók páronként egymásnak inversei.

Ezen G csoport $2p+r-1$ fundamentalis operatióból a következő módon tehető össze. Képzeljük az egyszerűen összefüggő $F_{r,p}$ felülettel homoeomorph $\Phi_{r,p}$ polygont megszerkesztve és vegyük szemügyre a polygon belsejében fekvő azon Π_0 pontot, mely az $F_{r,p}$ P_0 pontjának felel meg. Ha A a $\Phi_{r,p}$ fentebb $+$ jellel ellátott egyik oldalának egy pontja, A' pedig a konjugált oldalnak azon pontja, mely a $\Phi_{r,p}$-nek a felületbe való deformatiójánál, annak fentebb $\Phi''_{r,p}$-vel jelölt stadiumában az A ponthoz végtelen közel fekszik, akkor a polygon belsejében haladó AP_0A' útnak a felületen egy zárt görbe felel meg, mely azon metszetet, a melynek partjai az AP_0A' görbe által összekötött oldalaknak felelnek meg, a negativ parttól a pozitiv felé egyszer átlépi.

Mivel a $\Phi_{r,p}$ egészben véve $2p+r-1$ konjugált oldalpárt tartalmaz, ennélfogva ezen módon az $F_{r,p}$-*n* $2p+r-1$ oly tulajdonságú zárt útat nyerünk, hogy a felületen fekvő összes zárt útak ezen $2p+r-1$ útból, tehát a G csoport összes operatiói ezen zárt utaknak megfelelő operatiókból tehetők össze. Ha már most azon operatiókat, melyek a C_k, D_k metszeteket a pozitiv parttól a negativ felé átlépő zárt útaknak felelnek meg, S_k, T_k-val jelöljük, továbbá azon operatiót, mely az a_r határoló görbe mentén pozitiv irányban haladó zárt útnak felel meg, A_r-vel jelöljük, akkor fennáll ezen egyenlet:

$$A_r^{-1} = S_1T_1S_1^{-1}T_1^{-1} \ldots S_pT_pS_p^{-1}T_p^{-1}A_{r-1} \ldots A_1.$$

A G csoportnak egy inkább konkrét meghatározását a következőkép lehet adni.

Mivel a polygon igénybe vételénél minden konjugált oldalpár az $F_{r,p}$ felület két kongruens vonalának — nevezetesen egy és ugyanazon metszet két partjának — felel meg, ennélfogva könynyen belátható, hogy a polygon kezdettől fogva úgy választható, miszerint a konjugált oldalpárok egymással kongruens görbék legyenek. Hogy ez az alak és helyzet korlátozása nélkül teljesíthető legyen, a $\Phi_{r,p}$ polygont egy *euklidesi* vagy antieuklidesi síkban gondoljuk megszerkesztve és pedig úgy, hogy a conjugált oldalak ezen sík maga-magába való eltolásainál egymásba menjenek át. Az általánosság korlátozása nélkül a $\Phi_{r,p}$ oldalait kezdettől fogva *egyenes vonalak*-nak vehetjük. Az ily síkbeli és egyenes vonalak által határolt polygon *normálpolygon*-nak neveztetik.

Ennélfogva, ha azon eltolásokat, melyek ezen normálpolygon konjugált oldalpárait egymásba viszik át, a csoport fundamentalis operatiói gyanánt fogjuk fel, akkor a síknak maga-magába való eltolásaiból összetett eme csoport a G csoporttal teljesen aequivalens.

A G csoport, mely az $F_{r,p}$ felületnek az analysis situs szempontjából való leírásához nyilvánvalólag teljesen elegendő, analytikailag csakis akkép állítható elő, hogy a sík eltolásainak csoportjaként fogjuk fel; hogy ezen előállítást nyerhessük, előbb a sík elméletéből kell néhány ismeretet felemlítenünk.

II.

A sík maga-magába való eltolásainak elmélete.

Sík alatt egy oly két dimenziós sokaságot értünk, mely egy tetszőleges dimenzióval biró *euklidesi* térben bennfoglaltatik, tehát annak iveleme, ds a

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + G\,dv^2$$

pozitiv definita differencziális forma által van adva, és a melyre nézve az E, F, G-ből és ezeknek u, v szerinti második partialis differencziál hányadosaiból alkotott azon kifejezés, melyet *Gauss* a felület görbületi mértéke gyanánt bevezetett, állandó c értékkel bír.

Képezvén az u, v-ben azon kifejezéseket, melyek e koordináták választásától függetlenek, úgy az összesége eme kifejezések tulajdonságainak egy analitikai disciplinát állapít meg, melynek formuláiban fellép a c mennyiség és a mely egy c görbületi mértékkel bíró sík geometriája gyanánt fogható fel; ugyanis először, ha $c = o$, megegyezik ez az *euklidesi* sík analitikus geometriájával (melyben a parallelák posztulatuma érvényes), azután negativ c esetében megegyezik egy S rendszerű sík analitikus geometriájával, melylyel *Bolyai* foglalkozott az »Appendix«-ben és a melyben a *Bolyai* által i-vel jelölt mennyiségnek értéke $\sqrt{-\frac{1}{c}}$, végül pozitiv c esetén a közönséges *euklidesi* tér $\sqrt{-\frac{1}{c}}$ radiussal bíró gömbjén érvényes analitikus geometriával, ennek megfelelőleg a síkot $c=o$ esetben *Euklides*-féle, $c<o$ esetben *Bolyai* féle, végül $c>o$ esetében *Riemann*-féle síknak nevezzük.

A síknak íly általánosságban való felfoghatósága *Bolyai* J. előtt sem volt teljesen ismeretlen, kitűnik ez *Bolyai* J. némely jegyzeteiből, melyeket szintén *Stäckel* adott ki a hátrahagyott kézíratokból, valamint a már a bevezetésben említett »Responsio«-nak a 9. § ból, hol ugyanis a mindenütt egyalakú felületről (*superficies undique uniformis*«) szólván, ezeket mondja: »Quantitatem illam r, qua latera trianguli rectanguli in superficie quavis undique uniformi existentis dividenda sunt, ut statui possit

$$cos\frac{c}{r}=cos\frac{a}{r}cos\frac{b}{r},$$

e. g. parametrum huius superficiei appellare placeat . . .«

Ha *Bolyai* J. *Gauss*-nak »Disquisitiones generales circa superficies curves« czimű munkáját, mely 1828-ban jelent meg, ismerte volna, be lehetett volna látnia, hogy az, a mit ő r parameterrel bíró mindenütt egyalakú felületnek nevezett, nem más, mint egy állandó $c=\frac{1}{r^2}$ *Gauss*-féle görbületi mértékkel bíró felület.

Igy azonban megelégedett annak kimutatásával, hogy egy S rendszerben a síkok, a síkokhoz egyenlő távolságú (aequidistans) felületek (hyperspherak), továbbá a gömbök (egy adott ponttól egyenlő távolságú pontok helyei) és a parasphaerak (az »Appendix« F felületei) mind a mindenütt egyalakú felület kategoriájába tartoznak, s ezeket mondja:[1] »parametri, superficierum sphaericarum reales, parametri superficierum plano aequidistantium imaginariae evadunt«, a parasphaerakhoz tartozó parameter pedig végtelen nagy.[2]

Midőn ugyanis a »Responsio« kilenczedik paragraphusának[3] teljesebb kidolgozásában azt mondja, hogy a mindenütt egyalakú felület, az F kizárásával, csakis gömb, sík vagy egy síkkal párhuzamos (t. i. aequidistans) lehet, tényleg igazat mond, a mennyiben egy S rendszerben, melyre nézve a *Bolyai* által i-vel jelölt mennyiség tetszőlegesen megadott értékkel bír, a gömbök, síkok, hyperspaerak állandó görbületi mértékkel bíró felületek s ezek között mindig előfordúlnak olyanok, melyeknek görbületi mértéke egy tetszőleges pozitiv vagy negativ mennyiséggel egyenlő, ellenben a parasphaerak oly felületek, melyeken a görbület mértéke mindenütt eltünik, tehát ezekre nézve érvényes az *euklidesi* sík geometriája, mint azt már *Bolyai* az »Appendix«-ben (33. §.) kiemelte.

Ezen fejezetben vizsgálni fogjuk a síkot, nem mint egy *euklidesi* sokaságnak bizonyos, meghatározott geometriai képződményét, hanem csak oly vizsgálatokra szorítkozunk, melyekre nézve a sík az ívelem kifejezésével meg van határozva. Ekkor

[1] I. h. 289 l.
[2] I. h. 292 l.
[3] U. o. XVIII. köt., 286 l.

ugyanis érvényes az a tétel, hogy a sík oly értelemben, a mint kevéssel ezelőtt leírtuk, a görbületi mérték megadásával teljesen meg van határozva, azaz, hogy két sík, melyeknek görbületi mértéke ugyanazon értékkel bír, egyértékűleg oly módon vonatkoztatható egymásra, hogy a megfelelő ívelemek azonosak legyenek. Ebből önként következik, hogy egy és ugyanazon sík különböző részei még inkább vonatkoztathatók ily módon egymásra s ezen vonatkozást nevezzük a *sík magamagába való eltolásának.* Ezen tétel bizonyításánál azon útat fogjuk követni, melyen egyszerre a sík eltolásainak legáltalánosabb alakjához jutunk.

Ha a P síkban az u, v izometrikus koordinátákat jelentenek, az ívelem kifejezése:

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2), \tag{1}$$

s ismeretes formulákból következik, hogy ekkor az állandó görbületi mérték (c) így van kifejezve:

$$c = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2}\right).$$

Az u, v-nek mindig realis

$$U = \log \lambda \tag{2}$$

függvénye tehát az úgynevezett *Liouville*-féle

$$\Delta U = -2ce^{U} \tag{3}$$

differencziálegyenletnek tesz eleget, hol a szokásos

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}$$

jelölés van alkalmazva.

Ha $z=u+v\sqrt{-1}$ tesszük s a z komplex változó oly két $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ függvényét vesszük, melyekre nézve

$$(4) \qquad \varphi=2e^{-\frac{U}{2}}=c_1\,\mathfrak{Y}_1\,\overline{\mathfrak{Y}}_1+c_2\,\mathfrak{Y}_2\,\overline{\mathfrak{Y}}_2,$$

hol c_1, c_2 két realis konstanst jelentenek, melyeknek szorzata

$$(5) \qquad c_1\,c_2=c$$

és a hol $\overline{a}$ az a komplex mennyiség konjugáltját jelenti, kapjuk, hogy az $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ a

$$(6) \qquad \frac{d^2 y}{d z^2}=q(z).\,y$$

homogén linearis másodrendű differencziálegyenletnek tesznek eleget, hol

$$(7) \qquad q(z)=\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \text{ és}$$

$$(8) \qquad \mathfrak{Y}_1\frac{d\,\mathfrak{Y}_2}{d z}-\mathfrak{Y}_2\frac{d\,\mathfrak{Y}_1}{d z}=1$$

tehető.

Az ívelem ekkor ily módon van kifejezve:

$$(9) \qquad d\,s^2=\frac{4\,(d\,u^2+d\,v^2)}{(c_1\,\mathfrak{Y}_1\,\overline{\mathfrak{Y}}_1+c_2\,\mathfrak{Y}_2\,\overline{\mathfrak{Y}}_2)^2}$$

vagy pedig, ha az

$$(10) \qquad \eta=\frac{\mathfrak{Y}_2}{\mathfrak{Y}_1}=p+q\sqrt{-1}$$

integrálhányadost bevezetjük, ily módon:

$$(11) \qquad ds^2=4\frac{dp^2+dq^2}{[c_1+c_2\,(p^2+q^2)]^2},$$

mely alak a P sík íveleme *kanonikus alak*jának, a p, q koordináták pedig *kanonikus koordinátá*knak neveztetnek.

Az ívelemnek egy másik

$$ds^2 = 4\frac{dp_1^2 + dq_1^2}{[c_1 + c_2(p_1^2 + q_1^2)]^2}$$

kanonikus alakjához oly módon térhetünk át, hogy a (6) alatti másodrendű differencziálegyenletnek $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ alaprendszere helyére egy másik y_1, y_2 alaprendszert teszünk, melyre nézve

$$y_1\frac{dy_2}{dz} - y_2\frac{dy_1}{dz} = 1,$$

$$c\, y_1 \overline{y_1} + c_2\, y_2 \overline{y_2} = c_1\, \mathfrak{Y}_1 \overline{\mathfrak{Y}_1} + c_2\, \mathfrak{Y}_2 \overline{\mathfrak{Y}_2}$$

és azután

$$p_1 + q_1\sqrt{-1} = \eta_1 = \frac{y_2}{y_1}$$

van téve.

Ezen csere, mivel az ívelemet nem változtatja, nyilvánvalólag a P sík maga-magába való legáltalánosabb eltolásának felel meg, ezen eltolás tehát egy az $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$-re alkalmazott homogén linearis, unimodularis substitutióval, mely a

$$\varphi = c_1\, \mathfrak{Y}_1 \overline{\mathfrak{Y}_1} + c_2\, \mathfrak{Y}_2 \overline{\mathfrak{Y}_2}$$

Hermite-féle formát maga-magába transformálja. s így az

$$\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

projectiv substitutióval, melyre nézve

(12) $$c_1 + c_2\, \eta\overline{\eta} = (\gamma\eta + \delta)^2 (c_1 + c_2\, \eta_1 \overline{\eta_2}),$$

van előállítva.

Hogy ezen eltolásokat pontosabban jellemezhessük, válaszszuk c_1 és c_2-t úgy, hogy $c_1 = 1$, $c_2 = c$

legyen és válasszuk külön azon eseteket, melyekben c>0, c=0, c<0, azaz, a melyekben a sík *Riemann*-féle, *Euklides*-féle vagy *Bolyai*-féle sík.

Egyenes vonal alatt a (p_1, q_2), (p_2, q_2) pontokon keresztűl menő oly görbét értünk, melyre nézve az

$$(13) \qquad \int_{(p_1,\, q_2)}^{(p_2,\, q_2)} ds = 4 \int_{(p_1,\, q_2)}^{(p_2,\, q_2)} \sqrt{\frac{dq^2+dq^2}{[1+c(p^2+q^2)]^2}}$$

integrál egy minimum. Ebből az egyenes vonal általános egyenlete számára a következő alakot nyerjük:

$$(14) \qquad l[1-c(p^2+q^2)]+2mp+2nq=0,$$

hol l, m, n tetszőleges állandók. A (13) alatti integrált, ha az ily egyenes vonal mentén vétetik, a két (p_1, q_1) és (p_2, q_2) pont egymástól való *távolságának* nevezzük.

Azon pontok, melyeknek távolsága a $p=0$, $q=0$ ponttól végtelen nagy, melyekre nézve tehát

$$(15) \qquad 1+c(p^2+q^2)=0,$$

a sík végtelen távoli elemeit alkotják. Ezek, ha $c>0$, imaginariusok, ha $c=0$, egy végtelen távoli pontot nyerünk, ez a $p=\infty$, $q=\infty$, ha pedig $c<0$, a végtelen távoli pontok egy realis, folytonos, egy dimenziós képződményt alkotnak.

A P sík realis pontjai azok, melyeknek távolsága a $p=0$, $q=0$ ponttól valós, ennélfogva, ha $c \geqq 0$, a p, q minden értékének a síknak realis pontjai felelnek meg. Azonban, ha $c<0$, a p, q-nak csak azon realis értékei szolgáltatnak valós síkbeli pontokat, melyekre nézve

$$(16) \qquad 1+c(p^2+q^2) \geqq 0.$$

A p, q coordinátak oly tulajdonságúak, hogy minden realis p, q értékpárnak, a $c<0$ esetben azonban csak azoknak, melyek a (16) alatti egyenlőtlenséget kielégítik, kivétel nélkűl s fordítva is *egyértékűleg* a síknak egy pontja felel meg.

Két realis egyenes egymást mindig két pontban metszi. Ha (p_1, q_1), (p_2, q_2) a két metszéspontja két egyenesnek, akkor minden esetben

$$1+c(p_1+q_1\sqrt{-1})(p_2-q_2\sqrt{-1})=0;$$

két oly pontot, melyek között ezen vonatkozás fennáll, a (15) alatti végtelen távoli képződményre vonatkozólag *konjugált polusok*nak mondunk; ebből kifolyólag, ha $c>0$, két egyenesnek mindkét metszéspontja mindig realis,[1] ha $c=0$, az egyik metszéspont mindig a $p=\infty$, $q=\infty$ ponttal esik össze, tehát a másik szükségképen realis, ha $c<0$, akkor vagy mindkét metszéspont képzetes (midőn a nekik megfelelő p, q coordinátók is imaginariusok), vagy a végtelen távoli pontban összeesnek, vagy az egyik valós s a másik képzetes.

Két oly egyenest, melyek egymást zérus szög alatt metszik, *párhuzamos*nak nevezünk. A *Riemann*-féle síkban párhuzamos egyenesek nem léteznek. Ha $c \leqq 0$, két párhuzamos egyenesnek két metszés-

[1] A két pontnak egyesítése által keletkezik a Riemann-féle síknak azon módosítása, melyet *Klein* F. ismertetett először. Ezen értekezésben a két pontot egymástól különbözőnek gondoljuk.

pontja a végtelenben mindig összeesik, egy megadott egyeneshez egy tetszőleges ponton keresztűl az *euklidesi* síkban egy, a *Bolyai*-féle síkban két párhuzamos huzható. A *Bolyai*-féle síkban két oly egyenest, melyeknek mindkét metszéspontja képzetes, *divergens*-nek nevezünk.

Az eltolásokra nézve három tételt állíthatunk fel. Először a *Riemann*-féle síkban $(c>0)$ minden eltolás az

$$\frac{S\eta-\lambda}{S\eta-\mu}=e^{\delta\sqrt{-1}}\frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu}$$

alakú elliptikus substitutiókkal állítható elő, hol a λ, μ fixpontok a végtelen távoli képződményre vonatkozólag konjugált polusok, δ egy realis szög. Ezen eltolás nem más, mint a λ, μ fixpontok körül δ szög alatt történő forgatás. Azután az *euklidesi* síkban az eltolások ily alakkal biró:

$$S\eta=e^{\delta\sqrt{-1}}\eta+\beta$$

elliptikus vagy parabolikus substitutiók, az egyik fixpont azonban mindig a végtelenben van. Az elliptikus substitutiók δ szög alatt való forgatásokat eredményeznek, a parabolikus substitutiók (ezeknél $\delta=0$) pedig az úgynevezett párhuzamos eltolásokat szolgáltatják (V. ö. a bevezetéssel). Végül a *Bolyai*-féle síkban $(c<0)$ vannak:

1. Elliptikus substitutiók:

$$\frac{S\eta-\lambda}{S\eta-\mu}=e^{\delta\sqrt{-1}}\frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu},$$

melyeknek fixpontjai, λ, μ conjugált polusok a végtelen távoli képződményre vonatkozólag s melyek δ szög alatt való forgatást eredményeznek a realis fixpont körűl.

2. Hyperbolikus substitutiók, melyeknek fixpontjai a végtelenben vannak s melyek a síkot a két fixpontot összekötő egyenes mentén eltolják, miért is ezen egyenes az eltolás *tengelyének* neveztetik.

3. Parabolikus substitutiók, melyeknek egyetlen fixpontja a végtelenben van s melyek az *euklidesi* sík párhuzamos eltolásainak felelnek meg.

Általában minden eltolás egyeneseket egyenesekbe visz át. Azon eltolás, mely egymást metsző egyeneseket oly módon transformál egymásba, hogy a metszőpont önmagának feleljen meg, ha a metszőpont a végesben fekszik, egy elliptikus substitutio által, ha pedig az egyenesek párhuzamosak, parabolikus substitutio által van előállítva. Két divergens egyenest egymásba transformáló eltolásnak mindig hyperbolikus substitatio felel meg.

Az itt vázolt eredményeknek a normálpolygonra való alkalmazásával nyerjük, hogy azon eltolások, melyek által a konjugált oldalpárok egymásba mennek át, analitikailag egy komplex változó projectiv substitutioival állíthatók elő és pedig azon substitutiók, melyek az s_v^--tól az s_v^+-hoz való átmenetet szolgaltatják, szükségképen elliptikus vagy parabolikus substitutiók. Ebből következik, hogy a G csoport egy komplex változóra alkalmazott projektiv substitutiók csoportjaként állítható elő.

III.

A leképezés conformitása. A két probléma.

Hogy az előbbeni fejezetben vázolt helyzetgeometriai vizsgálatoktól a komplex változó függvényeinek elméletéhez átmehessünk, az $F_{r,p}$ felület és a $\Phi_{r,p}$ normálpolygon között fennálló vonatkozást módosítanunk kell olyképen, hogy a szétmetszett $\bar{F}_{r,p}$ felület és a $\Phi_{r,p}$ polygon közötti általános homoeomorphizmus helyére *homoeometria*, vagyis egyértékű conformis leképezés lépjen. Mielőtt azonban gondosabban megvizsgálnók, vajjon ezen conformis leképezés lehetséges-e, azon tény alapján, hogy homoeometriának kell fennállania, megkisereljük a $\Phi_{r,p}$ normálpolygonnak bizonyos teljesebb meghatározását adni.

Nehogy a mi vizsgálataink az általánosságot nélkülözzék, a következőkben azon megszorítást, hogy az $F_{r,p}$ felület *Bolyai*-féle normálfelület legyen, szükséges lesz mellőzni s az $F_{r,p}$ alatt egy tetszőleges $(2p+r)$-szeresen összefüggő, r görbe által határolt két dimenziós sokaságot érteni, mely egy tetszőleges dimenzióval biró *euklidesi* térben bennfoglaltatik. Mivel az ilyen sokaság mindig egy *Bolyai*-féle normálfelülettel homoeomorph, ennélfogva a normálfelületen elhelyezett kanonikus metszeti rendszer ezen $F_{r,p}$ sokaságra is átvihető; ugyanez áll az analysis situsnak a normálfelületre vonatkozó minden más vizsgálatára nézve is.

Először is gondoljuk, hogy az $F_{r,p}$-re az u, v izometrikus coordinátákat bevezettük, hogy tehát az $F_{r,p}$ felület dS íveleme ezen egyenlet által:

$$dS^2 = \Lambda\,(du^2 + do^2)$$

van megadva. Azon principiumok szerint, melyeket *Gauss* a conformis leképzés elméletére vonatkozólag felállított, ha a $\Phi_{r,p}$ normálpolygont tartalmazó P sík pontjainak meghatározására ezen u, v coordináták használtatnak, a P sík íveleme a

$$dS^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

alakot veszi fel, hol, mivel $U = log\,\lambda$ a II. fejezet (3) alatt levő *Liouville*-féle parczialis másodrendű differencziál egyenletnek egy megoldása, az

$$\overline{U} = U - log\,\Lambda$$

szükségképen megoldása a

$$D\overline{U} = -2ce^{\overline{U}} - D\,log\,\Lambda \tag{3a}$$

másodrendű parczialis differencziál-egyenletnek, ha a DV symbolum a

$$DV = \frac{1}{\Lambda}\,\Delta V$$

egyenlettel van értelmezve. A (3*a*) alatti differencziál-egyenlet a II. fej. (3) alatt levő *Liouville*-féle egyenlet felett előnynyel bír azon oknál fogva,[1] hogy az

[1] *Poincaré*, Journal de Mathématiques (Liouville). V. ser., IV. köt., 155 l.

$\overline{U}$ függvény a felületre bevezetett u, v izometrikus koordináták választásától független. A λ függvény ismeretesnek tekintendő.

Ha a koordinátákat különösen olyanoknak tételezzük fel, hogy az $F_{r,p}$ felület minden pontjának, kivétel nélkül, az u, v bizonyos értékpárja felel meg, akkor a $z = u + v\sqrt{-1}$ változó az $F_{r,p}$-n a helynek úgynevezett egyértékű monogén függvénye lesz.[1] Az ily u, v koordináták létezésének kimutatása czéljából a már ismert eredményekre csak úgy támaszkodhatunk, ha a határoló görbék számát, r-ret vagy zérusnak, vagy tetszőleges egész számnak tételezzük fel, midőn azonban minden határoló görbe csakis egy kizárt pontnak (tremának) gondolandó. A következőkben az r-et tetszőleges számnak fogjuk feltenni, úgy, hogy tehát az $F_{r,p}$ egy $(2p+1)$-szeresen összefüggő zárt F_p sokaságból keletkezik az $a_1, \ldots, a_r$ r számú pontnak kizárása által. Ismeretes, hogy az F_p zárt sokaságban mindig léteznek a helynek oly egyértékű monogén függvényei, melyek az F_p sokaság egyik pontjában sem határozatlanok[2] és a melyek azoknak ketteje: z és t által raczionalis módon fejezhetők ki, ellenben a z és t között egy $F(z,t) = 0$ p-edrangú algebrai egyenlet áll fenn. Az $F(z,t) = 0$ egyenlettel összekapcsolt (z, t) értékpárok és az F_p sokaság pontjai között fennálló vonatkozás kivétel nélkül kölcsönösen egyértékű, úgy, hogy

[1] *Klein* szerint (Riemann's Theorie etc, 1882, 19 l): A helynek komplex függvénye.

[2] *Fuchs* értelmezése szerint (Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1885, 281 l).

tehát az F_p sokaság pontjai a nekik megfelelő (z, t) komplex értékpárok által jellemezhetők. Ha $z = u + v\sqrt{-1}$ tesszük, akkor az u, v úgy az F_p-n, valamint az $F_{r,p}$-n a keresett tulajdonsággal biró koordináták lesznek.

Ennélfogva, ha a P sík ds ívelemét a II. fej. (11) alatti kanonikus alakba átvive gondoljuk, az $\eta = p + q\sqrt{-1}$ ezen $z = u + v\sqrt{-1}$ monogén függvénye lesz, ezen η a II. fej. (6) alatti másodrendű linearis differencziálegyenlet integráljainak hányadosaként van értelmezve és a következő tulajdonságokkal bír:

Mivel a szétmetszett $\overline{F}_{r,p}$ sokaságnak a $\Phi_{r,p}$ polygonra való leképezése kölcsönös és kivétel nélkül egyértékű kell hogy legyen, ennélfogva η az $F_{r,p}$ felületen a (z,t)-nek mindenütt egyértékű függvénye és fordítva a z és t a $\Phi_{r,p}$ polygonon belül egyértékű függvényei az η-nak. Ha az $F_{r,p}$ felületnek a (z, t) értékpárral meghatározott pontja valamelyik l_v metszetet pozitiv irányban átlépi, akkor η az $A_v\eta$ elliptikus vagy parabolikus substitutiot szenvedi, mely a s_v^- oldalnak az s_v^+-ba való eltolásának felel meg, ellenben ha a (z, t) pont a C_k, D_k metszetek valamelyikét lépi át, η az $S_k, T_k\eta$ substitutiot szenvedi, mely a γ_k^--t a γ_k^+-ba, illetőleg a δ_k^--t a δ_k^+-ba viszi át. Ennek következtében tehát η a szétmetszett $F_{r,p}$ sokaságon az $F(z, t) = 0$ egyenlettel összekötött (z, t) változóknak végtelen sok értékű függvénye és ezen függvény összes ágai abból, melynek értéktartományát a $\Phi_{r,p}$ normálpolygon pontjai képezik, az

$$A_1, \ldots, A_{r-1}, S_1, \ldots, S_p, T_1, \ldots, T_p$$

eltolásokból és ezek inverseiből összerakott G csoport projektiv substitutioinak alkalmazásával keletkeznek. Mivel a G összes substitutioi a P sík eltolásai, ennélfogva a φ *Hermite*-féle forma ezen substitutiók alkalmazásánál maga-magába transformáltatik, tehát az $F_{r,p}$-n a helynek egyértékű függvénye, miből következik, hogy a z változónak a II. fej. (7) egyenlete által értelmezett $q(z)$ monogén függvénye az F_p sokaságban a helynek monogén és egyértékű függvénye, tehát egyértékű függvénye a (z, t)-nek.

Az $F_{r,p}$-nek a $\Phi_{r,p}$-re való leképezésének mindenütt conformisnak kell lenni, ez alól csakis az $a_1, \ldots, a_r$ kizárt pontok által megállapított helyek képeznek kivételt. Ugyanis, ha azon (z, t) értékpárokat, melyek az F_p sokaság a_k pontjainak felelnek meg, $z = a_k$, $t = b_k$ által jelöljük, az

$$a_k, b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

pontok az η függvény elágazó pontjai lesznek. Az η-nak ezen helyeken való viselkedése jellemezve van az A_k $(k = 1, 2, \ldots, r-1)$ és az

$$A_r = A_1^{-1} \ldots A_{r-1}^{-1} T_p S_p T_p^{-1} S_p^{-1} \ldots T_1 S_1 T_1^{-1} S_1^{-1}$$

elliptikus vagy parabolikus substitutiok által. Hogy ezen substitutiok milyenek, az ismét következik azon szögekből, melyek a $\Phi_{r,p}$ polygon szögpontjaiból alkotott egyes cyklusokban fellépnek. Ha ugyanis azon szög, melyet az s_v^-, s_v^+ oldalak a λ_v $(v = 1, 2, \ldots, r-1)$ szögpontban bezárnak, zérus, akkor az A_v substitutio parabolikus, ha pedig ezen szög egyenlő $2\pi\varphi_v$-vel, akkor A_v egy ily alakkal biró:

$$\frac{A_v\eta-\lambda_v}{A_v\eta-\mu_v}=C^{2\pi\sqrt{-1}\varphi_v}\frac{\eta-\lambda_v}{\eta-\mu_v},\ (0<\varphi_v\leqq 1)$$

elliptikus substitutió. Hasonló módon határozza meg a $\lambda_r^{(i)}$ szögpontoknál fellépő s egy cyklust alkotó szögeknek összege: $2\pi\varphi_r$ az A_r substitutiónak természetét.

Követeljük most, hogy az $F_{r,p}$—n a helynek monogén és egyértékű függvényei nemcsak a $\Phi_{r,p}$ normálpolygon területén belül, hanem egészen általánosan egyértékű függvényei legyenek az η-nak. Hogy ez bekövetkezzék, ahhoz nyilvánvalólag szükséges és elegendő, hogy a (z, t) egyértéküek legyenek az η-ban. Azon körülményből, hogy a (z, t) a $\Phi_{r,p}$ normálpolygon szögpontjaiban egyértékű, mint azt *Fuchs* kimutatta, következik, hogy a φ_k mennyiségek, hacsak el nem tűnnek, szükségképen oly törtszámok, melyeknek számlálója 1, és hogy η a $z=a_k$, $t=b_k$ helyeken nem lehet határozatlan. Ennélfogva

$$\varphi_k=\frac{1}{g_k}$$

tehető, hol g_k egy véges vagy végtelen nagy pozitiv egész szám, az A_k substitutiók tehát vagy periodikus elliptikus, vagy parabolikus substitutiók.

Ha $g_k=1$, a leképezés az a_k helyen is conformis és η a $z=a_k$, $t=b_k$ helyen szabályosan viselkedik, minek következtében az a_k pont egyáltalán nem tekintendő kizárt pontnak.

A II. fej. (6) alatti másodrendű differencziálegyenletnek y_1, y_2 alaprendszere ily módon:

$$y_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \quad y_2 = \eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}$$

fejezhető ki s erre való tekintettel nyerjük e differencziálegyenlet következő tulajdonságait:

A II. fej. (6) alatti másodrendű differencziálegyenletnek megoldásai az F_p sokaságnak minden (a_k, b_k)-tól különböző helyének környezetében szabályosan viselkednek, azaz egyértéküek, végesek, folytonosak és magukban az (a_k, b_k) helyekben sem határozatlanok, tehát először is a $q(z)$ raczionalis függvénye a (z, t)-nek, továbbá a másodrendű differencziálegyenlet a *Fuchs*-féle osztályhoz tartozik, s a $z=a_k$, $t=b_k$ singularis pontokhoz tartozó determináló fundamentalis egyenletek gyökeinek különbségei az $\frac{1}{g_k}$ értéket veszik fel. Azon projektiv substitutióknak összeségét, melyeket az integrálhányados szenved, ha a (z, t) az F_p-n minden zárt útat befut, a G csoport eltolásai adják meg.

Látjuk, hogy a teljes meghatározásához eme problémának, melyben az $F_{r,p}$ felületnek a $\Phi_{r,p}$ normálpolygonra való conformis leképezéséről van szó, meg kell adni a cyklusokat képező egyes szögpontokban a szögeket és pedig úgy, hogy azok 2π aliquot részei legyenek, vagy, a mi ugyanaz, az $a_1, \ldots, a_r$ kizárt pontok mindegyikéhez bizonyos $g_1, \ldots, g_r$ egész számot, mely esetleg végtelen is lehet, kell kijelölni, miáltal meg van határozva a $\Phi_{r,p}$ szögpontjainak egyes cyklusaiban előforduló szögeknek összege.

A p, r és $g_1, \ldots, g_r$ számoknak megadásával pedig a P sík, melyben a $\Phi_{r,p}$ normálpolygon foglaltatik, teljesen jellemezve van. Képezvén ugyanis a P síkban fekvő $4p+2(r-1)$ egyenes vonal által határolt $\Phi_{r,p}$ polygonnak »curvatura integra«-ját, *Gauss* szerint kapjuk, hogy

$$\iint c\,dw = \sum_{k=1}^{r} \frac{2\pi}{g_k} - (4p + 2r - 4)\,\pi,$$

hol dw a P sík területeleme s az integrál $\Phi_{r,p}$ polygon fölött terjesztendő ki. Ezen egyenlettel, mivel az $\iint dw$ faktor természeténél fogva pozitiv, úgy a c mennyiség előjele, valamint a P sík természete meg van határozva. Rövid megfontolás mutatja, hogy csak nehány pontosan meghatározható esetben lesz $c > 0$ vagy $c=0$ és pedig,[1] azon trivialis eseteknek, hol $p=0$ ér $r < 3$, kizárásával,

$c < 0$ lesz, ha

1. $p=0,\ r=3,\ g_1=2,\ g_2=2,\ g_3=$ tetszőleges szám,
2. $p=0,\ r=3,\ g_1=2,\ g_2=3,\ g_3=3,$
3. $p=0,\ r=3,\ g_1=2,\ g_2=3,\ g_3=4,$
4. $p=0,\ r=3,\ g_1=2,\ g_2=3,\ g_3=5,$

$c=0$ lesz, ha

5. $p=1,\ r=0$
6. $p=0,\ r=4,\ g_1=2,\ g_2=2,\ g_3=2,\ g_4=2$
7. $p=0,\ r=3,\ g_1=2,\ g_2=2,\ g_3=\infty,$

[1] *Poincaré,* Acta Mathematica, IV. köt., 226 l.

8. $p=0,\ r=3,\ g_1=2,\ g_2=4,\ g_3=4,$
9. $p=0,\ r=3,\ g_1=2,\ g_2=3,\ g_3=6,$
10. $p=0,\ r=3,\ g_1=3,\ g_2=3,\ g_3=3;$

hol természetesen a g_k számok még permutálhatók. A többi eset mind negativ c-t eredményez, azaz *az $F_{r,p}$ sokaságnak kölcsönösen egyértékű és conformis leképezése általában csakis egy Bolyai*-féle *síkban foglalt normálpolygonra lehetséges.*

Ezen dolgok előrebocsátása után két különböző probléma vár elintézésre a szerint, a mint a $\Phi_{r,p}$ normálpolygonból vagy az $F_{r,p}$ sokaságból indulunk ki. Ezen két problémát következőképpen fogalmazzuk meg:

I. Megadatván egy $\Phi_{r,p}$ normálpolygon, melyre nézve a szögpontok cyklusaiban a szögeknek öszszege egyenlő a 2π megadott aliquot részével vagy pedig zérus, keressük, hogy vajjon a $\Phi_{r,p}$ leképezhető-e kölcsönösen egyértékűleg és conformisan egy $\overline{F}_{r,p}$ egyszerűen összefüggő sokaságra, mely egy $(2p+r)$-szeresen összefüggő és r kizárt ponttal bíró $F_{r,p}$ felületnek szétmetszése által keletkezik?

II. Megadatik egy $(2p+1)$-szeresen összefüggő F_p zárt sokaság, melyet az $a_1, \ldots, a_r$ singularis pontoknak kizárásával r görbe által határolt sokasággá változtatunk; ezen singularis pontok mindegyikéhez egy egész számot, (mely esetleg végtelen nagy is lehet) jelölünk ki. Keressük, hogy vajjon az $F_{r,p}$ szétmetszése által keletkező $\overline{F}_{r,p}$ egyszerűen öszszefüggő sokaság kölcsönösen egyértékűleg és conformisan leképezhető-e egy normalpolygonra?

Az egész számoknak

$$(p,\ r,\ g_1,\ g_2, \ldots,\ g_r)$$

rendszerét, mely mindegyik problemának természetét meghatározza; az illető problema *signaturá*-jának nevezzük.

IV.

Az első problema tárgyalása.

Legyen adva egy $\Phi_{r,p}$ normalpolygon, azaz tehát egy egyenes vonalak által határolt polygon, mely a következő tulajdonsággal bír:

Ha a $\Phi_{r,p}$ kerületét pozitiv irányban befutjuk, akkor az oldalak ezen sorrendben

$$s_{r-1}^{-},\ s_{r-1}^{+}, \ldots,\ s_1^{-},\ s_1^{+},\ \gamma_1^{+},\ \delta_1^{+},\ \gamma_1^{-},\ \delta_1^{-}, \ldots,\ \gamma_p^{+},\ \delta_p^{+},\ \gamma_p^{-},\ \delta_p^{-}$$

következnek egymásután, az s_k^{-}, s_k^{+}; γ_k^{-}, γ_k^{+}; δ_k^{-}, δ_k^{+} oldalpárok kongruensek, az s_k^{-}, s_k^{+} oldalak által a λ_k szögpontokban bezárt szögek egyenlők $\dfrac{2\pi}{g_k}$-val és a többi $\lambda_r^{(i)}$ szögpontban a szögeknek összege egyenlő $\dfrac{2\pi}{g_r}$-el.

Ezen szögeknek megadása által, mint azt láttuk volt, meg van határozva, hogy vajjon a P sík, melyben a $\Phi_{r,p}$ polygon van, *Riemann*-, vagy *Euklides*-, vagy *Bolyai*-féle sík-e; ezen sík görbületi mértékének abszolut értéke többé nem jön tekintetbe, ha $c \neq 0$, c-t az egységgel egyenlőnek választhatjuk.[1]

[1] Ha a c görbületi mértékkel bíró P sík (p, q) kanonikus koordinátáit egy állandó γ faktorral megszorozzuk vagy ha általánosan a P

Példa gyanánt kiemelünk különösen két esetet, melyek az alkalmazásokban nagy fontosságuaknak fognak bizonyulni (l. VI. fej.).

1. Legyen $r=1$ és az $F_{r,p}$ polygon szögeinek összege 2π. Ezt feltételezve, ha $p=0$ s így tehát $c>0$, akkor nincsen polygon, azaz a polygon az egész *Riemann*-féle sikot betölti. Mivel ezen síkot nyilvánvalólag végtelen sokféle módon lehet egy tetszőleges egyszerűen összefüggő zárt sokaságra egyértékűleg és conformisan leképezni, a problemát elintézettnek mondhatjuk, s ezért a következőkben is ezen esetet mindig mellőzni fogjuk. Mivel, ha $p=1$, $c=0$ (III. fej. 5. eset), a polygon nem más, mint az *euklidesi* sík parallelogrammája. Ha $p>1$, akkor $c<0$ mindig és a polygon egy a *Bolyai*-féle síkban fekvő $4p$ oldallal

$$\gamma_1^+,\ \delta_1^+,\ \gamma_1^-,\ \delta_1^-,\ldots,\ \gamma_p^+,\ \delta_p^+,\ \gamma_p^-,\ \delta_p^-$$

bíró alakzat, melyről mondhatjuk, hogy az *euklidesi* sík parallelogrammájának felel meg, mivel a γ_k^+, δ_k^+, γ_k^-, δ_k^- négy oldal a parallelogramma oldalaihoz hasonló egyenlőségi viszonyokat tüntet fel és a szögeknek összege itt is egyenlő 2π-vel. A *Bolyai*-féle síkban fekvő, $4p$ oldallal bíró ily alakzatot *p-ed rangu isogrammá*-nak nevezzük s elsőrangú isogramma gyanánt tekinthetjük az *euklidesi* sík parallelogrammáját.

sík egy eltolását alkalmazzuk a $\gamma\eta$-ra, akkor az egy $\gamma^2 c$ görbületi mértékkel bíró P' síkba megy át, melynek ívelcme a P sík ívelemétől a γ faktorban különbözik, tehát a P és P' megfelelő ábrái egymáshoz hasonlók. Ha c eltünik, P' a P-vel összeesik, ennélfogva az *euklidesi* síkban léteznek hasonló ábrák.

Mivel az A_k substitutio nem más, mint az identikus substitutio, ennélfogva az S_k, T_k eltolások között ezen vonatkozás áll fenn:

$$T_p \; S_p \; T_p^{-1} \, S_p^{-1} \ldots \; T_1 \; S_1 \; T_1^{-1} \; S_1^{-1} = 1.$$

2. Ha $p=0$, $r \geqq 3$, akkor a polygon egy $2r-2$ szögponttal bíró alakzat, melyben az S_k^- S_k^+ $(k=1, 2, \ldots, r-1)$ oldalpárok kongruensek. Ezen alakzat csakis a III. fej. 1—4. eseteiben fekszik a *Riemann*-féle s a 6—10. esetekben az *euklidesi* síkban; minden más esetben a *Bolyai*-féle síkban; az ily polygont *ruta*-nak nevezzük.

A $\Phi_{r,p}$ polygon általában meghatározza az

$$A_v \qquad (v=1, 2, \ldots, r)$$
$$S_k, \quad T_k \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

eltolásokat és pedig az A_v-k mindig parabolikus vagy periodikus elliptikus substitutiok, ellenben az S_k, T_k eltolások, ha $p=0$, azaz különösen ha a polygon a *Riemann*-féle síkban fekszik, egyáltalában nem lépnek fel, ha pedig a polygon az *euklidesi* síkban fekszik, akkor is csak a III. fej. 5. esetében, midőn tehát a polygon egy parallelogramma, lép fel az S_1 és T_1 s ezen két substitio ekkor párhuzamos eltolás, tehát parabolikus substitutio. Minden más esetben a γ_k^+, γ_k^-, és δ_k^+, δ_k^- oldalpárokat a *Bolyai*-féle sík divergens egyenesei alkotják, tehát az S_k, T_k eltolások szükségképen hyperbolikus substitutiók.

Egy $4p + 2r - 2$ egyenes által határolt síkbeli polygon alakját illetőleg (azaz eltekintve a síkon belül való tetszőleges eltolásától) $8p + 4r - 7$ valós állandótól függ. Egy $\Phi_{r,p}$ normálpolygonra nézve, a mennyiben oldalai páronként kongruensek, $6p+3r-6$ állandó marad meg rendelkezésünkre. Ha a g_1, $g_2, \ldots, g_r$ számokat adottaknak vesszük, a

$$(p, r, g_1, g_2, \ldots, g_r)$$

signaturával bíró $\Phi_{r,p}$ normálpolygon $6p + 2r - 6$ realis állandótól fog függni, mely szám, ha a $\Phi_{r,p}$ egy $p > 1$ rangszámmal bíró isogramma, $(6p-6)$-ra, ha $p=1$, 2-re, ha az egy ruta, $(2r - 6)$-ra redukálódik.[1]

Ezen szám, a mint annak lennie kell, megegyezik azon lényeges parameterek számával, melyektől a normálpolygon által meghatározott A_v, S_k, T_k eltolások függnek, ha a signatura adottnak tekintetik.

Ha az ezen eltolásokból és azok inverseiből összetett G csoportját vizsgáljuk az eltolásoknak, nyilvánvaló lesz, hogy mindazon csoportok, melyek adott signaturával bíró normálpolygonokhoz tartoznak, holoedrikusan isomorphok, tehát a fentebb meghatározott szám azon valós állandóknak a számát is szolgáltatja, melyektől egy

$$(p, r, g_1, g_2, \ldots, g_r)$$

signatura által meghatározott, holoedrikusan isomorph eltolási csoportok osztálya függ. Az állandó parameterek, melyektől egy meghatározott signatu-

[1] L. *Poincaré*, Acta Mathematica, I. köt., *Klein*, Mathem. Annalen, XXI. köt., 196 l.

rával bíró $\Phi_{r,p}$ normálpolygon függ, csakis bizonyos egyenlőtlenségi feltételek által korlátoztatnak.

Ha ezen parametereknek minden egyes értékrendszerét egy ν dimenziós (mely ν szám a fentebb adott számmal egyezik) Σ *euklidesi* tér egy-egy pontjával képzeljük előállítva, akkor ezen pontok egy a Σ-ban foglalt ν dimenziós M_ν sokaságot fognak kitölteni, tehát a megadott signaturával bíró minden egyes normálpolygonnak az M_ν sokaság egy pontja felel meg.

Poincaré [1] kimutatott egy tételt, mely a következő vizsgálatokra alapvető s mely szerint *ezen M_ν sokaság egy zárt sokaság.*

Ha a $\Phi_{r,p}$ polygonra az ezen polygon által meghatározott G eltolási csoportnak minden eltolását alkalmazzuk, a P síkban egy, a $\Phi_{r,p}$-vel kongruens polygonokból álló hálózatot nyerünk. A *Poincaré* [2] által azon esetre, midőn a polygon a *Bolyai*-féle síkban fekszik, adott módszer alkalmazásával általánosan is kimutatható, hogy az ily módon megalkotott hálózat polygonjai az egész síkot *egyszerűen és hézag nélkül* befödik.

Az eltolások G csoportjának ez előbbi tételben kimondott tulajdonságát a G csoport *discontinuitásának* nevezzük, tehát a szükséges és elegendő feltétel arra nézve, hogy az eltolásoknak a $\Phi_{r,p}$ normálpolygon által értelmezett csoportja discontinuus

[1] Acta Mathematica, IV. köt, 250 l.

[2] Acta Mathematica, I. köt., 27. l.; V. ö. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, II. köt., II. rész, (Lipcse 1898.) 104 l. s köv.

legyen, abban áll, hogy a szögpontok cyklusaiban keletkező szögek összege zérus vagy 2π aliquot része legyen, vagy rövidebben, hogy az $A_1, \ldots, A_r$ fundamentalis substitutiók között levő elliptikus substitutiók periodikusok legyenek.

Ha a $\Phi_{r,p}$ a *Riemann*-féle síkban fekszik, mivel az egész *Riemann*-féle sík területe véges $\frac{4\pi}{c}$ értékkel bír, a hálózat polygonjainak száma, valamint a discontinuus G eltolási csoport substitutióinak száma véges, és pedig a III. fej. 1—4. eseteiben annyi mint $2g_3$, 12, 24, 60; mivel továbbá a c görbületi mértékkel bíró *Riemann* féle sík mindig a három dimenziós euklidesi sík egy gömbjére teríthető le, ezen módon eljutunk azon eljáráshoz, melynek segélyével a gömb felülete kongruens gömbi sokszögekre felosztható.

Ha $c \leqq 0$, akkor a hálózat polygonjainak száma, valamint a discontinuus G eltolási csoport substitutióinak száma végtelen nagy. Hogy az I. problemát elintézzük, ki kell mutatnunk, hogy léteznek az η változónak oly monogén függvényei, melyek a $\Phi_{r,p}$-n belül raczionalis függvények természetével bírnak és a melyek a $\Phi_{r,p}$ kongruens oldalainak megfelelő pontjaiban ugyanazon értéket veszik fel. A G csoporthoz tartozó ily függvényeket *Klein* szerint *automorph függvények*-nek nevezzük. Minden nehézség nélkül kimutatható ez azon esetre, midőn $p=0$, $r=3$; ezen s egynehány más könnyen elintézhető esetet előre veszünk, hogy a következő általános vizsgálatok könnyebb megértésére szolgáló példáink legyenek.

Ha $p=0$, $r=3$,[1] a polygon egy négyoldalú ruta, mely mivel e szám $6p+2r-6=0$, a g_1, g_2, g_3 három számnak megadásával teljesen meg van határozva. A III. fej. (6) alatti másodrendű differencziál-egyenletben, mivel $p=0$, a $q(z)$ együttható a z-nek raczionalis függvénye és, mint mindig, ha $p=0$, az F_p sokaság gyanánt választhatjuk az *euklidesi* síkot, melyen a z komplex változó értékeit közönségesen ábrázolni szokás; mivel ezenkivűl egy, a z-re alkalmazott linearis transformáczióval az a_1, a_2, a_3 singularis pontokat a z sík 0, 1, ∞ pontjaiba vihetjük át s mivel a III. fej. (6) alatt levő egyenlet a *Fuchs*-féle osztályhoz tartozik és a determináló fundamental egyenletek gyökeinek különbségei szükségképen $\frac{1}{g_1}$, $\frac{1}{g_2}$, $\frac{1}{g_3}$ értékkel bírnak, ezen differencziálegyenlet a

$$(G)\quad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}\left\{\frac{\frac{1}{g_1^2}-1}{z^2}+\frac{\frac{1}{g_2^2}-1}{(1-z)^2}+\frac{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}-\frac{1}{g_3^2}-1}{z(1-z)}\right\}$$

alakot ölti fel, mely lényegében egy *Gauss*-féle differencziálegyenlet. Kimutatható, hogy ezen egyenletből a z tényleg az integrálhányadosnak, η-nak automorph függvényeként jelenik meg. Ha $c>0$, azaz a III. fej. 1—4. eseteiben ezen egyértékű függvény raczionalis, s ez által nyerjük azon eseteket, melyekben a (G) egyenlet az úgynevezett szabályos testek függvényeit értelmezi. Ha $c=0$, a III. fej.

[1] *Schwarz*, i. h; *Klein* Ikosaëder (Lipcse, 1884); *Klein-Fricke*, Modulfunctionen (Lipcse, 1890), 65 l. s köv.

7. esetében z az η-nak egyszerűen periodikus függvényeként jelenik meg, a III. fej. 8 - 10. eseteiben pedig a z az η-nak biperiodikus függvénye lesz, melynek egy második vagy harmadik egységgyökkel való komplex multiplikácziója van. Azon esetekben, melyekben $c < 0$, az η változónak z függvénye az η-nak csak oly értékei mellett létezik, melyek a *Bolyai*-féle sík valós pontjainak felelnek meg, azaz, melyekre nézve $1 + c\,\eta\bar{\eta} \geqq 0$, ezenkivül ezen függvény a czélszerűen választott $(0, \infty)$ és $(1, \infty)$ metszetek által szétmetszett *euklidesi* z sík egyértékű és conformis leképezését szolgáltatja a *Bolyai*-féle sík egy négyszögű rutájára. Ha $g_1 = g_2 = g_3 = \infty$, mely esetben ezen rutának négy szögpontját a *Bolyai*-féle sík végtelen távoli pontjai képezik, az úgynevezett elliptikus modulfüggvényekhez [1] jutunk.

Elintézvén azon eseteket, melyekben a $\Phi_{r,p}$ polygon egy *Bolyai*-féle síkban fekszik, azon esetek közül, melyekben a $\Phi_{r,p}$ az *euklidesi* síkban fekszik, már csak kettő, nevezetesen a III. fej. 5. és 6. esete van hátra.

Az 5. esetben, melyben a $\Phi_{r,p}$ az *euklidesi* síknak egy parallelogrammája (Φ_1), az elliptikus függvényeknek elmélete szolgáltatja η-nak azon egyértékű függvényeit, melyek a Φ_1 paralellogrammán belül raczionalis függvények természetével bírnak s a melyek a Φ_1 szembenfekvő oldalaiban ugyanazon értéksorozatot veszik fel, vagyis a Φ_1-hez tartozó automorph függvényeket. Ezen függvények meg-

[1] L. *Fuchs*, Journal für Mathematik (Crelle), 83. köt. *Dedekind*, u. o.; *Klein-Fricke*, i. h.

alkotási módja a Φ_1 oldalait képező két geometriai mennyiségnek τ hányadosától függ; ez két realis állandóval aequivalens komplex állandó, melytől a Φ_1 parallelogramma lényegesen függ. Az η független változónak a Φ_1-hez tartozó automorph (elliptikus) függvényei azoknak ketteje

$$z=\varphi(\eta), \quad t=\psi(\eta)$$

által, melyek között egy elsőrangú algebrai egyenlet áll fenn, raczionalis módon fejezhetők ki s minden (z, t) értékpárnak a Φ_1 parallelogrammán belűl egy pont felel meg és viszont. Ha

$$t=x+y\sqrt{-1}, \quad z=u+v\sqrt{-1}, \quad \eta=p+q\sqrt{-1}$$

tesszük, x, y, u, v a p, q egyértékű függvényei lesznek, melyek ha például x, y, egy négy dimensiós *euklidesi* tér koordinátáinak tekintetnek, egy

$$dS^2=|dz|^2+|dt|^2=\{|\varphi'(\eta)|^2+|\psi'(\eta)|^2\}(dp^2+dq^2)$$

ívelemmel bíró két dimenziós F_1 sokaságot határoznak meg. A z, t függvények segélyével az F_1-en a Φ_1 oldalainak megfelelő két görbe pár határoztatik meg, melyek az F_1-et egyszerűen összefüggő $\overline{F}_1$ sokaságba szétmetsző C_1, D_1 metszetek gyanánt tekintendők, az $\overline{F}_1$ sokaság ekkor a Φ_1 sokasággal homoeometrikus. Az F_1-nek az *euklidesi* z-síkba való projiciálása által a közönséges *Riemann*-féle felületet nyerjük, mely a t-nek, mint z függvényének a szétágazását tünteti fel, z alkalmas választásával η egy elsőfajú elliptikus integrál által

$$\eta = \int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}$$

lesz kifejezve, mely integrálnak modulusa, a k_2 a τ mennyiséggel, mint elliptikus modulfüggvény, ugyan egyértékűleg, azonban transcendes módon van meghatározva.

A 6. esetben a $\Phi_{r,p}$ polygon egy *euklidesi* síkban fekvő hatszög, mely azonban háromszögnek tünik fel, melyben az egyes oldalak felezési pontjai is szögpontoknak tekintendők, és mely lényegében véve két valós állandótól függ. Mivel $p=0$, a z alkalmas választásával a négy singularis pont közül hármat, pl. a_1, a_2, a_4-t az $F_{r,p}$ gyanánt tekintendő *euklidesi* síknak 0, 1, ∞ pontjaiba vihetünk át, mi által a III. fej. (6) egyenlete ezen alakot veszi fel:[1]

$$\text{(F)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = \left\{ \frac{1}{4} \frac{R''}{R} - \frac{3}{16} \frac{R'^2}{R^2} - \frac{\lambda^2}{R} \right\} y,$$

hol

$$R = z(z-1)(z-a_3),$$

s a λ, a_3 még meghatározandó állandókat jelentenek. Azon feltétel szerint, hogy a projektiv substitutiók, melyeket a z változó körülfutásánál az η integrálhányados szenved, az *euklidesi* sík eltolásai, a λ eltünik, az a_3 komplex állandó pedig, mely a $\Phi_{r,p}$ polygont meghatározó két realis állandóval aequivalens, egyértékűleg meghatározható, és pedig, mivel

$$\eta = \gamma_1 \int \frac{dz}{\sqrt{R}} + \gamma_2,$$

[1] *Fuchs* Göttinger Nachrichten 1881. 445. l

hol γ_1, γ_2, állandók, találjuk, hogy az lényegében ismét egy elliptikus modulsubstitutió.

Míután azon eseteket, melyekben $c \gtreqq 0$, ily módon elintéztük, kezdettől fogva feltehetjük, hogy a $\Phi_{r,p}$ polygon egy *Bolyai*-féle síkban fekszik, midőn is az eltolások discontinuus G csoportját *Fuchs*-féle csoportnak, az ehhez tartozó automorph függvényeket pedig *Fuchs*-féle függvényeknek nevezzük; ezen függvények létezésének kimutatására két út kinálkozik, melyeknek kifejtéséhez most általmegyünk.

Az egyik, *Klein*[1] által adott módszer azon principiumokon alapszik, melyeknek segélyével egy két dimenziós zárt sokaságra (*Riemann*-féle felületre) nézve a hely monogén és egyértékű függvényeinek létezése kimutattatik, ezen módszer nemcsak azon esetben alkalmazható, midőn a polygon egy *Bolyai*-féle síkban fekszik, sőt czélhoz vezet akkor is, ha ama feltételt, hogy a $\Phi_{r,p}$ egy cyklust képező szögpontjaiban keletkező szögeknek összege a 2π aliquot része legyen, elhagyjuk.[2]

A másik módszer szerint, mely *Poincaré*tól[3] ered, a *Fuchs*-féle függvények létezését az által mutatjuk ki, hogy ezen függvényeket bizonyos konvergens sorokkal állítjuk elő, ezen módszer azonban

[1] Mathematische Annalen, XXI. köt., 141 l.; *Ritter*, u. o., XLI. köt., 1 l.; XLIV. köt., 349 l.; V. ö. *Klein-Fricke*, Automorphe Functionen, II. köt. (Lipcse, 1901).

[2] Ha a szögek összege nem aliquot része a 2π-nek, akkor az η változónak azon függvényei, melyeknek létezése kimutattatik, már természetesen nem lesznek mindenütt egyértéküek.

[3] Acta Mathematica, I. köt., 193 l. s köv.

csak akkor alkalmazható, ha a $\Phi_{r,p}$ normálpolygon egy *Bolyai*-féle síkban fekszik s az ő szögei eleget tesznek azon feltételeknek, melyekből a G csoport discontinuitása következik. Alapszik egy oly gondolaton, mely általánosabb kérdések felvetésénél is nagy fontossággal bír.

Ha a $\Phi_{r,p}$ polygon által meghatározott *Fuchs*-féle G csoport substitutióit egy bizonyos sorrendben

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, (S_0=1),$$

betükkel jelöljük s $H(\eta)$-val az η-nak egy bizonyos raczionalis függvényét, mely a *Bolyai*-féle sík egyetlen egy végesben fekvő η-helyén sem válik végtelenné, akkor a

$$\Theta(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu\eta)\left(\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right)^m \tag{1}$$

végtelen sor, melyben m az egységnél nagyobb positiv egész számot jelent, feltétlenűl és egyenletesen konvergens az η-nak minden komplex értékénél, kivévén azokat, melyek mellett az

$$1 + c\eta\bar{\eta} = 0, \tag{2}$$

egyenlet teljesül és a melyek mellett a $H(S_\nu\eta)$ vagy $\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}$ raczionalis függvények valamelyike végtelenné válik.

Poincaré az (1) sornak, melyet *Fuchs*-féle *Theta*-sornak nevezett, konvergencziáját két különböző úton mutatta ki; mindkettőben közös annak a kimutatása, hogy az (1) sornak konvergencziája a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right)^m$$

sor konvergencziájától függ.

Az első bizonyítási mód lényegében azon alapszik, hogy a *Bolyai*-féle S síkot, mely a $\Phi_{r,p}$ polygont tartalmazza, egy

$$ds = |d\eta| = \sqrt{dp^2+dq^2}$$

ivelemmel biró Σ *euklidesi* síkra egyértéküleg leképezzük olyképpen, hogy az S sík realis pontjainak a Σ sík (2) alatti körének belső pontjai, az S sík végtelen távoli pontjainak pedig a (2) kör kerületén lekvő Σ-pontok felelnek meg. Ha már most egy η pont körűl, mely a Σ síknak a $\Phi_{r,p}$ polygonnak megfelelő $\overline{\Phi}_{r,p}$ tartományán belül fekszik, egy teljesen a $\overline{\Phi}_{r,p}$-n belül fekvő bizonyos C_0 határolt részt gondolunk és megszerkesztjük mindazon C_ν tartományokat, melyek a C_0-ból az S_ν substitutiók alkalmazásával keletkeznek, akkor ezek mind a (2) körön belül fognak feküdni és a G csoport discontinuitása következtében egymást át nem fedik, így tehát az *euklidesi* geometria szerint vett területeiknek összege, a menynyiben kisebb a (2) kör területénél, véges értékkel bír; ebből közvetlenül következik, hogy a (3) alatti sor konvergens.

A második bizonyítási módnál csakis a *Bolyai*-féle S sík felmérése használtatik fel. Szerkesszük meg az $\eta = 0$ pont, mint közös középpont körül a köröknek egy C_1, C_2, . . . sorát, melyeknek radiusai a *Bolyai*-féle geometria szerint mérve számtani haladványban növekedjenek. Ha U_n a (3) alatti sor azon tagjainak összegét jelenti, melyekre nézve η-nak a $\Phi_{r,p}$-n belül való választása mellett az $S_v\eta$-pontok a C_{n-1} és C_n által határolt körgyűrűben feküsznek, akkor adódik, hogy

$$U_n < \frac{K}{e^{n(m-1)\rho}},$$

hol a K egy meghatározott állandó, ρ pedig a C_1 körnek a sugara, innen következik, hogy a (3) alatti sor gyorsabban konvergál, mint a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K}{e^{n(m-1)\rho}}$$

geometriai sor. Ezen bizonyítási mód alapján a $6p+2r-6$ realis parameternek, melyek a $\Phi_{r,p}$ polygont adott signatura mellett meghatározzák, bizonyos határok között való variálása által megismerjük azt is, hogy az (1) alatti sor, a mennyiben ezen parameterekre nézve egyenletesen konvergens, azok folytonos függvényét állítja elő.

Az (1) sor tehát azon η-értékek mellett, melyek a *Bolyai*-féle sík valós pontjainak felelnek meg, azaz, a melyek az

$$1 + c\eta\bar{\eta} > 0$$

egyenlőtlenségnek eleget tesznek, az η-nak egy monogén és egyértékű függvényét állítja elő, mely a $\Phi_{r,p}$ polygonon belül csak véges számú pontban válik a raczionalis függvényhez hasonlóan végtelenné; ezen függvényre nézve a S sík végtelen távoli pontjainak, azaz a (2) alatti egyenletet kielégítő η-értékeknek összesége *természetes határt* képez. Arra, hogy az (1) sor azon η-értékek mellett, melyek az

$$1+c\eta\bar{\eta}<0$$

egyenlőtlenségnek tesznek eleget, szintén egy egyértékű függyényt állít elő, melyre nézve a (2) egyenletet kielégítő η-értékek természetes határt alkotnak, a következő vizsgálatokban nem leszünk tekintettel; annyi azonban bizonyos, hogy ezen két függvény között, jóllehet egy és ugyanazon analitikai kifejezés által vannak előállítva, semmiféle analitikai kapcsolat nincs. Most tehát kizárólag az (1) sor által a *Bolyai*-féle sík realis pontjaira nézve értelmezett függvénynyel, mely *Fuchs*-féle *Theta-függvény*nek neveztetik, fogunk foglalkozni.

Ezen függvény nyilvánvalólag eleget tesz a

$$\Theta(S_h\eta)=\left(\frac{d\,S_k\eta}{d\eta}\right)^{-m}\Theta(\eta) \tag{4}$$

functionalis egyenletnek, úgy, hogy különböző $H(\eta)$ raczionalis függvényekkel, de egy és ugyanazon m számmal megalkotott *Fuchs*-féle Theta-függvényeknek 0-adfokú raczionalis homogén formája nem változik, ha η-ra a *Fuchs*-féle G csoport substitutióit alkalmazzuk; ezen alak, mivel a $\Phi_{r,p}$-n belül véges számú helyen válik raczionalis függvény módjára végtelenné, egy a $\Phi_{r,p}$-hez tartozó *Fuchs*-féle függvényt állít elő. Nyilvánvaló, hogy minden ily függvény azoknak ketteje:

$$z=\varphi(\eta)\quad,\quad t=\psi(\eta)$$

által, melyek között egy $F(z,t)=0$ p-ed rangú algebrai reláczió áll fenn, raczionalis módon kifejezhető.

Ha

$$z=u+v\sqrt{-1}\ ,\quad t=x+y\sqrt{-1}$$

tesszük, akkor η-nak ezen két függvénye, z és t által az (u, v, x, y) négy dimenziós *euklidesi* térben egy két dimenziós, $(2p+1)$-szeresen összefüggő $F_{r,p}$ sokaságunk van elkülönítve, melyben a $\Phi_{r,p}$ polygon szögpontjainak megfelelő r számú pont kizárandó pont. Ezen sokaság a $\Phi_{r,p}$ oldalainak megfelelő görbék mentén szétmetszetvén, egy egyszerüen összefüggő sokaságba megy át, mely a $\Phi_{r,p}$ polygonhoz homoeometrikusnak mutatkozik. Ha $F_{r,p}$-t a z complex változó ábrázolására szolgáló síkra projiciáljuk, akkor egy közönséges *Riemann* féle felületet nyerünk, mely a z nek t algebrai függvényéhez tartozik s mely a $\Phi_{r,p}$ polygon szögpontjainak megfelelő r pontban singularis pontokkal bír.

Az első problemának ily módon való elintézésével mondhatjuk, hogy ezen két $z=\varphi(\eta)$ és $t=\psi(\eta)$ függvény által a $\Phi_{r,p}$ polygonnak egy zárt és r singularis ponttal biró sokaságba való átalakítása, melyhez a II. fejezetben a $\Phi_{r,p}$-nek az analysis situs szempontjából való deformatiója és a konjugált oldalak egyesítése által eljutottunk, úgy végezhető, hogy a keletkező sokaság, vagy szabatosabban a neki megfelelő s egyszeresen összefüggő sokaság a $\Phi_{r,p}$ polygonnal necsak homoeomorph, hanem homoeometrikus is legyen.

V.

A második probléma tárgyalása.

Most egy $(2p+1)$-szeresen összefüggő, két dimenziós zárt sokaságból kell kiindulnunk, mely $a_1, \ldots, a_r$ r számú helyen singularis pontokkal van ellátva s ezek mindegyikéhez egy meghatározott egész szám van kijelölve. Az ezen F_p sokasághoz tartozó egyértékű és monogén függvényei a helynek, azoknak ketteje, z és t által raczionalis módon fejezhetők ki, míg ezen z és t között egy $F(z,t)=0$ p-edrangú algebrai egyenlet áll fenn. A z-nek ezen t algebrai függvénye egy az *euklidesi* z sík fölött kiterjesztett s az adott F_p sokasággal homoeometrikus *Riemann*-féle felületet határoz meg. Ha nem ezen zárt sokaságból, hanem a két z és t változó között fennálló $F(z,t)=0$ p-edrangú algebrai egyenletből indulunk ki, akkor a z *euklidesi* sík fölé elhelyezett s a t algebrai függvény szétágazását előállító R_p *Riemann*-féle felületnek megalkotása semmi akadályba sem ütközik. Hogy ezen felület egy $(2p+1)$-szeresen összefüggő zárt sokasággal, pl. egy *Bolyai*-féle normálfelülettel *homoeomorph*, az az I. fejezetben foglalt vizsgálatok alapján nyilvánvaló, de még az, hogy vajjon R_p pl. egy *Bolyai*-féle normálfelületre *homoeometrikusan* vonatkoztatható-e, eddig nincs eldöntve.[1] Ennélfogva a második problémát megakarván for-

[1] V. ö. *Poincaré,* Journal de Mathématiques (Liouville), V. ser., IV. köt., 149 l.

mulázni, először is kiindulunk egy, a z complex változó *euklidesi* síkja fölött kiterjedő s $(2p+1)$-szeresen összefüggő *Riemann*-féle felületből, mely a z-nek t algebrai függvényét értelmezi, azután pedig a

$$z=a_k\,,\ t=b_k \qquad (k=1,2,\ldots,r)$$

pontoknak kizárásával ezen felületet $R_{r,p}$-be alakítjuk át és minden kizárt (a_k, b_k) ponthoz egy g_k egész számot jelölünk ki, s most kérdezzük, hogy vajjon az egyszeresen összefüggő $\overline{R}_{r,p}$ felület, mely az $R_{r,p}$-ből czélszerüen választott metszetek alkalmazásával keletkezik, a $(p,r,\,g_1,\ldots,g_r)$ signaturával biró $\Phi_{r,p}$ normálpolygonra homoeometrikusan vonatkoztatható-e? Analytikailag ezen kérdés így tehető fel:

A $\Phi_{r,p}$ normálpolygon meghatározásának lehetőségét feltételezve, $\eta=p+q\sqrt{-1}$, mint a

$$\frac{d^2y}{dz^2}=q(z,t)y \tag{1}$$

másodrendű differencziálegyenlet integrálhányadosa lesz értelmezve, mely egyenletben $q(z,t)$ az adottnak tekintendő

$$F(z,t)=0 \tag{2}$$

p edrangú egyenlet által összekapcsolt z,t változóknak raczionalis függvényét jelenti. Ezen raczionalis függvény meghatározásához a probléma adatai (v. ö. III. fej.) a következő feltételeket szolgáltatják: Az (1) differencziálegyenlet a *Fuchs*-féle osztályhoz tartozik, azaz integráljai sehol sem határozatlanok, az (a_k, b_k) singularis pontokhoz tartozó determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei $\frac{1}{g_k}$ értékkel bírnak, minden más (z,t) helyen az η

integrálhányados szabályosan viselkedik, azaz az R_p felületen egyértékű, véges és folytonos. Általánosan csupán ezek a feltételek a $q(z,t)$ teljes meghatározásához nem elegendők, hanem még bizonyos számú algebrailag meg nem határozható állandó, melyeket *Klein* szerint *accessorius parameterek*-nek nevezünk, határozatlan marad. Csupán ha $p = 0$, $r = 3$, tűnik el az accessorius parameterek száma, mely esetben a probléma a IV. fej. fejtegetéseivel már elintézést nyert; ugyanez áll a III. fej. 5. és 6. eseteire is, melyekben accessorius parameterek lépnek ugyan fel, azonban ezeknek meghatározását maga az elliptikus függvényeknek az elmélete szolgáltatja. Mindazáltal az ily módon elintézett esetek is, melyekben a $\Phi_{r,p}$ normálpolygon a *Riemann*-féle vagy *euklidesi* síkban fekszik, azaz melyekben a

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{g_k} - (2p + r)$$

szám pozitiv vagy zérus, tárgyát fogják képezni a következő vizsgálatoknak.

Midőn $q(z,t)$-t a probléma adatai által szolgáltatott feltételek szerint választjuk, az (1) alatti differencziálegyenletet *normális egyenlet*nek [1] nevezzük. Az (1) alatti differencziálegyenletek közűl azokat, melyek csak az accessorius parametereknek különböző értékei által különböznek egymástól, egy *typus*ba foglaljuk össze, úgy hogy problémánk a következő kérdésre lesz visszavezetve:

Vajjon az (1) alatti másodrendű differencziálegyenletben az accessorius parameterek meghatároz-

[1] *Poincaré* Acta Mathematica, IV köt., 223 l.

hatók-e úgy, hogy azon projektiv substitutióknak csoportja,[1] melyeket az η integrálhányados szenved, ha a (z,t) pont a *Riemann*-féle felületen minden zárt útat befut, tisztán azon P sík eltolásaiból legyen összetéve, melyet a probléma signaturája természete szerint meghatároz.

Ezen kérdés általánosságban való elintézése czéljából több módszert követhetünk, melyeket egyenként röviden le fogunk írni.

1. Continuitási módszer.

Ha feltesszük, hogy a normálpolygonban csakis azon adatok vannak megadva, melyek a probléma signaturáját meghatározzák, azaz csakis a $p,r,g_1 \ldots, g_r$ számok, azonban sem a *Riemann*-féle felület, vagyis a (2) alatti algebrai egyenlet, sem a kizárt pontok (a_k, b_k) helyei nem, akkor a $q(z)$ együttható is bizonyos N számú parametertől fog függni. Ezen parametereknek minden értékrendszere egy $\overline{M}$ sokaság pontját jelentheti, úgy, hogy a signatura megadatván, az (1) alatti differencziálegyenletek minden typusa ezen sokaság egy pontjának felel meg. Ha ezen $\overline{M}$ sokasággal azon M_ν sokaságot összehasonlítjuk, mely a III. fejezetben az által volt értelmezve, hogy az M_ν minden pontja egy $(p, r, g_1, \ldots, g_r)$ signaturával bíró $\Phi_{r,p}$ normálpolygonnak felelt meg, akkor az előző IV. fejezetben foglalt eredmények alapján mondhatjuk, hogy az M_ν minden pontjának az $\overline{M}$-nek egy jól meghatározott pontja felel meg.

[1] Az (1) diffenenczíálegyenlet úgynevezett *monodrom csoportja*.

[2] *Poincaré*, i. m. 233 l. s köv.; *Klein*, Mathematische Annalen, XX. köt.

Mivel pedig fennáll azon tétel,[1] hogy az (1) alatti differencziálegyenleteknek egy typusán belül csak egy oly egyenlet létezik, melynek monodrom csoportja csupán a P sík eltolásaiból van összetéve, ennélfogva az $\overline{M}$ egy pontjának az M_ν-nek egyetlen-egy pontja felel csak meg. Mivel — mint a III. fejezetben láttuk volt — az M_ν sokaság zárt sokaság, ebből következik, hogy fordítva az $\overline{M}$ sokaság minden pontjának az M_ν-nek szükségképen egy pontja felel meg, azaz, hogy az (1) alatti differencziálegyenletek minden typusának egy $\Phi_{r,p}$ normálpolygon felel meg, miáltal a felvetett kérdésre igenlő választ nyertünk.

2. A Liouville-féle differencziálegyenlet integrálásán alapuló módszer.[2]

Először is gondoljunk megadva egy $(2p+1)$-szeresen összefüggő, két dimenziós zárt F_p sokaságot, pl. egy *Bolyai*-féle normálfelületet; z és t legyen az F_p-n a helynek két egyértékű és monogén függvénye, melyek az $F(z,t)=0$ egyenlet által vannak összekapcsolva. Ha azután $z=u+v\sqrt{-1}$ tesszük, az F_p íveleme, dS a

$$dS^2=\Lambda(du^2+dv^2) \tag{3}$$

egyenlettel lesz előállítva, melyben a Λ az u, v-nek egy ismeretesnek tekintendő függvényét jelenti. Az F_p sokaságból a

[1] *Poincaré*, i. m. 231 l.

[2] *Poincaré*, Journal de Mathématiques (Liouville), V. ser., IV. köt., 137—230 l.; v. ö. *Picard*, u. o., IV. ser., VI, IX. köt., V. ser., IV. köt.

(4) $z = a_k, \; t = b_k$

pontok kizárása által egy görbékkel határolt $F_{r,p}$ sokaság keletkezik, melynek signaturáját az (a_k, b_k) kizárt pontokhoz bizonyos g_k egész számok kijelölése által alkotjuk meg. Ha az $\overline{F}_{r,p}$ egyszerű összefüggő sokasággal, mely az $F_{r,p}$-ből ennek szétmetszése által keletkezik, homoeometrikus $\Phi_{r,p}$ normálpolygon létezik, akkor a P síknak, melyben a $\Phi_{r,p}$ fekszik, íveleme, ds szükségképen a

(5) $$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2)$$

alakkal lesz kifejezve, hol (v. ö. III. fej.)

$$U = \log \lambda$$

a

$$\Delta U = -2ce^{U}$$

Liouville-féle egyenletnek és így

$$\overline{U} = U - \log \Lambda = \log \frac{\lambda}{\Lambda}$$

a

(6) $$D\overline{U} = -2ce^{\overline{U}} - D \log \Lambda$$

másodrendű differencziálegyenletnek tesz eleget, mely egyenletben

$$DV = \frac{1}{\Lambda} \Delta V$$

teendő. Innen következik, hogy az η változó, melynek segélyével a $\Phi_{r,p}$ és $\overline{F}_{r,p}$ között fennálló homoeometrikus vonatkozást nyerjük, a

(7) $$\frac{d^2 y}{dz^2} = q(z,t)\, y$$

másodrendű linearis differencziálegyenletnek, melyben a

$$(8) \qquad q(z,t) = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad \varphi = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} e^{-\frac{\overline{U}}{2}},$$

integrálhányadosaként jelenik meg s kétségtelen, hogy a (7) alatti differencziálegyenlet a fentebb adott értelmezés szerinti normálegyenlet. Mivel a fentebb említett feltételek, melyeknek a probléma adatai következtében a $q(z,t)$ alávetendő, meghatározzák, hogy miképen viselkedik a $q(z,t)$ az $F_{r,p}$ minden egyes helyének környezetében, meghatározzák tehát, hogy mimódon viselkedik az u,v valós változóknak realis $\overline{U}$ függvénye s kitűnik, hogy $\overline{U}$ az egész $F_{r,p}$ felületen egyértékű és folytonos és csakis az (a_k, b_k) singularis pontokban válik végtelenné a g_k számokkal meghatározott módon.[1] Ennélfogva[2] egy az $F_{r,p}$ felületen (a singularis pontok kivételével) egyértékű és véges realis h függvény határozható meg úgy, hogy az

$$\overline{\overline{U}} = \overline{U} + h = U - \log \Lambda + h$$

függvény az egész F_p felületen véges maradjon, ezen $\overline{\overline{U}}$ függvény a

$$(9) \qquad D\overline{\overline{U}} = \Theta e^{\overline{\overline{U}}} - \Phi$$

egyenletnek tesz eleget, hol

$$\Theta = -2ce^{-h}, \quad \Phi = D \log \Lambda - Dh$$

[1] *Poincaré,* i. m 157 l.
[2] *Poincaré,* i. m. 160 l.

van téve. A Θ és Φ függvények a probléma adatai által vannak meghatározva, a Θ mindig zérustól különböző, $\frac{\Phi}{\Theta}$ tehát mindig véges értékkel bír s mint könnyen igazolható,[1] a

$$\iint \Phi \, \Lambda \, du \, dv$$

integrálnak, kiterjesztve az egész F_p felületére, értéke

$$4\pi \left\{ 2p + r - 2 - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{g_k} \right\},$$

mi (v. ö. 109 l.) nem más, mint a

$$(p, r, g_1, \ldots, g_r)$$

signaturával biró $\Phi_{r,p}$ normálpolygon ellentétes jellel vett curvatura integrájának kétszerese.

Most annak megvizsgálásáról, van a szó, hogy vajjon adott F_p felület, megadott (a_k, b_k) singularis pontok és adott g_k egész számok mellett, azaz a Λ, Θ, Φ függvények megadása mellett a (9) alatti parczialis differencziálegyenletnek egy az egész F_p zárt felületen egyértékű és véges $\overline{\overline{U}}$ függvény által eleget lehet-e tenni. Hogy ily megoldás létezik, azt *Picard* és *Poincaré* különböző módszert követve, kimutatták.

Ha mi nem az F_p zárt felületből, hanem az $F(z,t)=0$ p-edrangú egyenletből indulunk ki, akkor az előbb adott módszert módosítanunk kell. Ha ugyanis R_p-t közönséges *Riemann*-féle felületnek tételezzük fel, mely a z változó t algebrai függvényének

[1] *Poincaré*, i. m. 227 l.

szétágazását állítja elő, akkor csakis egy, az R_p-vel homoeomorph (nem homoeometrikus) $(2p+1)$-szeresen összefüggő F_p *Bolyai* féle normálfelületnek létezését tételezhetjük fel, tehát ekkor az F_p íveleme általánosan nem a (3) alakot, hanem a

$$dS^2 = E\,du^2 + 2\,F du\,dv + G\,dv^2$$

általános alakot ölti fel, minélfogva, mint azt *Poincaré* kimutatta, a λ mennyiség helyett az *euklidesi* z síkban és az F_p felületen egymásnak kölcsönösen megfelelő felületelemek hányadosa teendő, minden egyéb azonban változatlanúl marad.

3. Az ismételt transformáczió módszere.

Ezen módszer eddig még csak azon specialis esetre van keresztül vive, midőn $p=0$, $g_k=\infty$ és az $a_1, \ldots, a_r$ singularis pontok (melyek, mivel $p=0$, az *euklidesi* z síkban fekvőknek gondolandók) egy körön feküsznek. [1]

Geometriai szempontból az ezen fejezetben vázolt vizsgálatokból a következőket nyerjük.

Két sokaság, melyek $(2p+1)$-szeresen összefüggő zárt sokaságokból r singularis pont kizárása által keletkeznek, mindig homoeomorphok, azonban akkor és csakis akkor homoeometrikusak is, ha nekik ugyanaz a normálpolygon felel meg.

[1] Journal für Mathematik (Crelle), CV. köt., 181—232 l., Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen, II. köt., II. rész (Lipcse, 1898), 268—324 l.; v. ö. *Poincaré*, Acta Mathematica, IV. köt., 285—300 l.

VI.

Alkalmazások.

Mielőtt az előzőkben vázolt általános elmélet alkalmazásait sorolnók fel, néhány különös esetet vegyünk szemügyre.

1. A két változó között fennálló algebrai egyenlethez tartozó isogramma.[1]

A vizsgálatot azon esettel kezdjük meg, midőn a normálpolygon egy p-edrangú isogramma (lásd 112 l.), kizárván a $p=0$ trivialis esetet. A III. és IV. fejezetekben kifejtettekből a következőket kapjuk:

a) Ha egy p-edrangú isogramma adva van, akkor η-nak mindazon egyértékű függvényei, melyek a Φ_p-n belül raczionalis függvény természetével bírnak és a melyek a Φ_p konjugált oldalainak megfelelő pontjaiban ugyanazon értéket veszik fel, azoknak ketteje:

$$z=\varphi(\eta),\quad t=\psi(\eta)$$

által, melyek között egy

$$F(z,t)=0$$

p-edrangú algebrai egyenlet áll fenn, raczionalisan kifejezhetők és az isogramma az $\overline{R}_p$ egyszerűen összefüggő felülettel, mely az $F(z,t)=0$ egyenlethez tartozó R_p *Riemann*-féle felületből alkalmasan választott metszetek által keletkezik, homoeometrikus.

[1] *Poincaré,* Acta Mathematica, I. köt, 254, l. s köv.; *Klein,* Mathem. Annalen XXI. köt, 141 l. s köv; *Schwarz,* Gesammelte Abhandlungen, II. köt. (Berlin, 1890.), 363 l. s köv.

b) Ha fordítva egy $F(z,t)=0$ p-edrangú algebrai egyenlet vagy a hozzá tartozó *Riemann*-féle felület van adva, ezen felület alkalmasan választott C_k, D_k metszetek által egyszerűen összefüggő $\overline{R}_p$ felületbe alakítható, mely mindig egy Φ_p p-edrangú isogrammával homoeometrikus. A P sík, melyben ezen isogramma van, csakis a $p=1$ esetben *euklidesi*, ha pedig $p>1$, mindig *Bolyai*-féle sík. Ha $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ a P sík kanonikus koordinátái, akkor z és t az $\eta=\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\sqrt{-1}$ egyértékű és automorph függvényei és pedig a $p=1$ esetben biperiodikus, ha pedig $p>1$, *Fuchs*-féle függvények, melyek az η-nak csak azon értékei mellett léteznek, a melyeknek a P sík valós pontjai felelnek meg.

Az $F(z,t)=0$ egyenlethez tartozó első- és másodfajú integrálok is egyértéküek az η-ban és midőn η a Φ_p isogrammához tartozó eltolások G csoportjának egy substitutióját szenvedi, az ily integrál egy periodiczitási modulussal szaporodik.

Az itt adott módszer egy p-edrangú egyenlettel összekapcsolt változókat azon esetben, midőn $p=1$ az elsőfajú integrálnak egyértékű és biperiodikus függvényeinek ismeretes alakjában állítja elő, ennélfogva ezen változóknak a $p>1$ esetben *Fuchs*-féle függvények segélyével nyert előállítását, a $p=1$ esethez tartozó ismeretes előállításnak *természetes általánosításaként* foghatjuk fel.

c) Ha $G(z_1, t_1)=0$ oly egyenletet jelent, mely az $F(z, t)=0$ egyenletből biraczionalis transormáczió útján keletkezik, úgy, hogy tehát az $F(z,t)=0$ egyenlettel — *Riemann* értelmezése szerint

— ugyanazon osztályhoz tartozik, akkor a két egyenlethez tartozó isogramma ugyanaz és fordítva is, két oly egyenlet, melyeknek ugyanaz az az isogramma felel meg, biraczionalis transformáczióval egymásba vihető át, tehát az isogrammát meghatározó adatok az *osztálynak invariánsai*. Mivel a p-edrangú isogramma, ha $p > 1$, $6p - 6$ valós, azaz $3p - 3$ komplex parametertől, melyek által meg van határozva, függ, ennélfoga ezen parameterek, a *Riemann* elnevezése szerint, az *osztály modulusai*nak tekinthetők. A $p = 1$ esetben csak egy modulus van s ez τ, a periodusok hányadosa (v. ö. III. fej.).

Ezeket geometriai szempontból tekintve, mondhatjuk, hogy két $(2p+1)$-szeresen összefüggő *Riemann*-féle felület, vagy — hogy általánosabban szóljunk — két $(2p+1)$ szeresen összefüggő két dimenziós zárt sokaság akkor és csak akkor homoeometrikus, ha nekik ugyanaz az isogramma felel meg és hogy teljesítendő feltételek száma (*ha* $p > 1$) $6p - 6$, s hogy homoeometrikus *Riemann*-féle felületek, vagy zárt sokaságok biraczionális transformáczióval mindig egymásba vihetők át.

Látjuk, hogy a két változó algebrai egyenletéhez tartozó isogramma az osztály módulusait igen világosan tünteti fel. Annak megismerése czéljából, hogy ezen felfogási mód mily eredményeket szolgáltat az algebrai függvények elméletében, elegendő lesz arra hivatkozni, hogy *Poincaré* az isogramma segélyével bizonyította be először szigorúan azon tételt,[1] hogy egy $p > 1$ rangszámmal bíró

[1] Acta Mathematika, VII. köt., 1 l. s köv.

algebrai egyenletet csak véges számú biraczionalis transformáczióval lehet maga magába átvinni; ebből pedig következik ezen tétel: egy rögzített szétágazási pontokkal biró elsőrendü differencziálegyenlet algebrai műveletek által mindig integrálható, ha a függő változó s az ő deriváltja között fennálló algebrai reláczió rangszáma nagyobb az egységnél.

Azon biraczionális transformácziókat, melyek alkalmazásánál az $F(z, t)=u$ egyenlet maga magába megy át, az isogramma morphologiai tulajdonságai teljesen megvilágítják; pl. a hyperelliptikus egyenlet röviden jellemezhető az által, hogy a $2p$ hyperbolikus (csakis a $p=1$ esetben parabolikus) substitutióknak, melyek az isogramma kongruens oldalait egymásba viszik át, tengelyei egymást egy pontban metszik.[1]

Ezeken kivül alkalmazásokat az *Abel*-féle integrálók elméletére *Humbert* is adott.[2]

2. A Poincaré-féle principium.[3]

Jelentse $y_1 \ldots, y_m$ a z komplex változó monogén függvényeinek egy rendszerét, mely függvények az

$$F(z, t)=u$$

algebrai egyenlethez tartozó *Rp Riemann*-féle felület minden pontjának környezetében, véges számú

[1] *Stouff*, Thèses (Páris, 1888), 45. l.

[2] Journal de Mathématiques (Liouville), IV. ser., III. köt., 327—404. l.

[3] Acta Mathématica, IV. köt., 277. l.

$$z=a_k,\ t=b_k \qquad (k=1,2,\ldots,r)$$

singularis pont kivételével, egyértéküek legyenek ezen singularis pontok mindegyikéhez egy g_k egész szám legyen kijelölve. Ha az $y_1,\ldots,y_n$ függvényeknek az $(a_k,\ b_k)$ ponthoz tartozó ágaiknak száma véges, akkor g_k ezen számmal egyenlőnek vétetik, ellenkező esetben pedig $g_k=\infty$ tétetik. Ha az R_p felületen az $(a_k,\ b_k)$ pontokat kizárván s minden kizárt ponthoz a megfelelő g_k egész számot kijelölvén, az egyszerűen összefüggő $\overline{R}_{r,\,p}$ felülettel homeometrikus normálpolygont, $\Phi_{r,p}$-t megszerkesztve gondoljuk, akkor az $y_1,\ldots,y_n$ épúgy, valamint maga a z és t az $\eta=\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\sqrt{-1}$ egyértékű függvényeiként jelennek meg, ha $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{q}$ a $\Phi_{r,p}$ polygont tartalmazó sík kanonikus koordinátáit jelentik, ez által tehát az $y_1,\ldots,y_n$ és a $(z,\ t)$ között fennálló funkczionalis vonatkozás az η segédváltozónak bevezetése által egyértékűvé van téve. Ezen felfogási mód *Poincaré* féle principiumnak neveztetik. Az $y_1,\ldots,y_n$ jelenthetik pl. egy homogén linearis n-edrendű differentiálegyenlet alaprendszerének elemeit, melynek koefficiensei a $(z,\ t)$ raczionalis függvényei.

Ekkor a $p,\ r,\ g_k$ azon értékrendszerére nézve, mely a III. fej. 5—10. eseteinek felel meg, a szóban levő differencziálegyenlet olyan, hogy az η segédváltozó bevezetésével az ő együtthatói az η-nak egyértékű és biperiodikus függvényei lesznek. Ennélfogva a *Lamé*-féle differencziálegyenlet és az általánosabb, úgynevezett *Picard*-féle differencziálegyenlet integrálásának ismeretes módszere a fentebb vázolt s az algebrai koefficiensekkel biró linearis differencziálegyenlet integrálására szolgáló módszerben, mint speczialis eset, bennfoglaltatik.

Legyen adva egy n-edrendű homogén linearis differencziálegyenlet:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

melynek koefficziensei raczionalis függvényei a z-nek s mely a *Fuchs*-féle osztályhoz tartozik és a melynek integráljai az *euklidesi* z-sík $a_1, \ldots, a_r$ helyein szétágazási pontokkal bírnak, továbbá legyenek $r_{k1}, \ldots, r_{kn}$ a $z = a_k$ pontokhoz tartozó determináló alapegyenletek gyökei. Ha már most az $r_{k1}, \ldots, r_{kn}$ mind raczionális számok s az integrálóknak a_k körűli sorbabontásában logarithmusok nem lépnek fel, akkor a g_k az $r_{k1}, \ldots, r_{kn}$ legkisebb közös nevezőjével egyenlőnek, minden más esetben pedig végtelen nagynak veendő. Ha megszerkesztjük a $(o, r, g_1, \ldots, g_r)$ signaturával biró $\Phi_{r,o}$ normálpolygont, mely az alkalmasan választott

$$(a_1, a_r), \ldots, (a_{r-1}, a_r)$$

metszetekkel egyszerűen összefüggő $F_{r,o}$ felületbe átalakított és az $a_1, \ldots, a_r$ singularis pontokkal és $g_1, \ldots, g_r$ számokkal ellátott z síkkal homoeometrikus, mely tehát ezen esetben egy *ruta* s ha az $\eta = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\sqrt{-1}$ függvényt, hol $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ a $\Phi_{r,o}$ polygont tartalmazó sík kanonikus koordinátái, független változó gyanánt bevezetjük, akkor kapjuk, hogy a z az η-nak egyértékű és automorph függvénye s az (A) egyenlet alaprendszerének elemei, $y_1, \ldots, y_n$ az η-nak szintén egyértékű

$$y_k = \Psi_k(\eta) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

függvényeibe mennek át; ezek oly tulajdonságúak, hogy ha η-ra a $\Phi_{r,\rho}$ polygon által meghatározott G eltolási csoportnak egy S_v substitutióját alkalmazzuk, akkor az $y_1, \ldots, y_n$ függvények az (A) differencziálegyenlethez tartozó monodrom csoportnak, Θ-nak egy homogén és linearis T_v substitutióját szenvedik. Ezen $\Phi_k(\eta)$ egyértékű függvények, melyeket *Poincaré* *Fuchs-féle Zeta függvényeknek* nevezett, ha a $\Phi_{r,\rho}$ polygon egy *Bolyai*-féle síkban fekszik és ha az $r_{k1}, \ldots, r_{kn}$ gyökök mind valósak, a

$$\text{(B)} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu^{-1} H_k(S_\nu \eta) \left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

alakú soroknak bizonyos *Fuchs*-féle Theta-sorokkal való hányadosaként állíthatók elő,[1] hol $H_1, \ldots, H_n$ az η raczionalis függvényeit jelentik és m egy elég nagy positiv egész szám. A (B) sor konvergencziáját *Poincaré*, ki ezen sorokat *Fuchs-féle Zeta soroknak* nevezte, mutatta ki, oly vizsgálatok igénybevételével, melyek a *Bolyai*-féle síkon való mérésen alapszanak.[2]

3. A linearis differencziálegyenletek elméletére vonatkozó Riemann-féle probléma.

A *Fuchs*-féle függvények bizonyos esetekben lehetővé teszik egy probléma megoldását, melyből *Riemann* hátrahagyott dolgozatában [3] megkisérelte a

[1] *Poincaré*, Acta Mathematica, V. köt., 257. l.
[2] I. h. 233—235, 259—264. l.
[3] Mathematische Werke (Lipcse, 1890), 379. l. s köv.

linearis differencziálegyenletek elméletét felépíteni, jóllehet annak megoldhatóságát nem bizonyította be. Ezen probléma abban áll, meghatározni a z complex változó oly függvényeinek rendszerét, melyek bizonyos előírt $a_1, \dots, a_r$ singularis pontok kivételével mindenütt egyértékűek, végesek és folytonosak, magukban ezen pontokban pedig nem határozatlanok és ugyancsak előírt $A_1, \dots, A_{r-1}$ homogén linearis substitutiókat szevednek, ha a z változó az $(a_1, a_r), \dots, (a_{r-1}, a_r)$ metszeteket positiv irányban átlépi. Hogy ezen probléma a *Fuchs*-féle Zeta sorok segélyével megoldható, azt a szerző kimutatta[1] azon feltétel mellett, hogy az $A_1, \dots, A_{r-1}$ és az

$$A_r = A_1^{-1} \dots A_{r-1}^{-1}$$

substitutiókhoz tartozó alapegyenletek gyökeinek abszolut értéke az egységgel egyenlő.

[1] V. ö. Journal für Mathematik. (Crelle) 123. köt., 138. l. s köv.

TARTALOM.

V.

A TÖBBMÉRETŰ SOKASÁGOK MECHANIKÁJÁRÓL.

IRTA:

STÄCKEL PÁL,

bölcsészetdoktor, a kieli tudomány-egyetem ny. r. tanára, a Magyar Tudományos Akadémia külső, a moszkvai mathematikai társaság tiszteletbeli tagja, a természet-vizsgálók Német Császári Leopoldina-Carolina Akadémiájának tagja.

Már a két *Bolyai* és *Lobacsefszkij*, ama éles elméjű mathematikusok, a kiknek az *Euklidesi* tizenegyedik axiomától független geometriát köszönhetjük, — jóllehet vizsgálataiknak a kiindúlási pontja és módszere geometriai természetű volt, — észrevették, hogy a geometriai rendszer változásával az analytikai mechanikának, sőt az egész mathematikai physikának is át kell alakúlnia.

A *geometria elemei* czímű művében *Lobacsefszkij* (1829-ben) már jelezte az imaginarius geometria befolyását a mechanikára, különösen pedig felvetette azt a kérdést, hogy nem lehetne-e az állócsillagok parallaxisából a parallelákra vonatkozó *Euklidesi* axiomának helyességét eldönteni; ő arra az eredményre jutott, hogy a csillagászok mérései, a megfigyelések pontossági határán belül, az *Euklidesi* geometriával teljesen összeegyeztethetők. Ujabb időben (1900-ban) *Schwarzschild* visszatért e tárgyra és az állócsillagok térbeli eloszlását is tekintve ugyancsak azt találta, hogy eddigelé nincs okuk a csillagászoknak az *Euklidesi* geometriát, — hogy egy *Schweikart*tól (1818-ban) használt kifejezéssel éljünk, — az *astrlális geometriá*val pótolni.

Bolyai Farkas is csillagászati megfontolásokhoz folyamodik, a midőn a *Generalis conspectus geometriae*ben, mely a *Tentamen* első kötetének (1832) végét képezi, a következőket jegyzi meg: Egészen másképen van, ha a dolgot nem a priori, hanem a gyakorlat szempontjából tekintjük, és ha *ac* az adott *ab* vonaldarabra merőlegesen áll, a posteriori mérjük meg azt az *u* szöget, a melyen innen a *bd* egyenes az *ac* egyenest még metszi; ekkor lehet csak a priori megállapítani, hogy az *u* az oly hosszúságú vonalak mellett, melyeket még megmérhetünk, a derékszögtől kevéssel különbözik. De mi történnék, ha az *ab* a Siriusig vagy még tovább meghosszabbíttatnék? Bármint legyen is ez, a tér segítségére jön annak öröktől fogva iker testvére, az idő, és azt tanítja, hogy mivel az égitestek mozgásai az $u=R$-re alapított számítással megegyeznek, megnyugvással elfogadhatjuk ezt az alapot ($u=R$) a gyakorlatban előforduló minden mérésünkhöz.

Bolyai János, Farkasnak fia, kinek századik születésnapja tiszteletére ez értekezést irom, „*Scientia spatii absoluta vera*" (1832) czímű művében semmit sem szól e tárgyról. Ellenben annak egy német átdolgozásában, mely 1835-ből származik és nem rég hagyatékában találtatott, megjegyzi, hogy az absolut geometria alapján a mechanikát is ki lehetne fejteni. Részletesebben szól erről a „*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* von *Lobacsefszkij* (1840)" egy kritikájában, melyről nemrég *Kürschák* és én jelentést tettünk. Földi mérések alapján, mondja itt *Bolyai*, lehetetlen az *Euklidesi* geometria és az absolut geometria közt megkülönböztetést tenni. De fel lehetne használni azt a különbséget, mely némely számításban fellép, ha a bolygók helyeit egyszer abból a föltevésből határozzuk meg, hogy a háromszög szögeinek összege éppen két derékszöggel egyenlő és hogy két test vonzása fordított arányban áll ahhoz a gömbfelülethez, melynek egyenesvonalú radiusa egyenlő a két égitest távolságával, és hogy ha a számítást a két derékszögtől egyre inkább és inkább eltérő szögösszeg szerint ismételjük. Ha aztán bizonyos eltérés a két derékszögtől azt mutatná, hogy a bolygóknak valóságos és kiszámított mozgása megszűnik egyezni, és ellenkezésük a két derékszögtől való eltérés nőttével növekednék, úgy joggal következtetni lehetne, hogy a szögösszeg kisebbel különbözik a két derékszögtől, mint amekkora az a bizonyos eltérés.

Érdekes, hogy egy bolygó mozgását egy központi test körűl *Killing* (1885-ben) ugyancsak a *Bolyai János*tól föltételezett vonzási törvény mellett discutálta. Ő kimutatta, hogy a mozgás, valamint az *Euklidesi* térben, a *Newton*-féle törvény fölvételével, úgy az absolut térben is kúpszeletekben megy végbe, még pedig a *Kepler*-félékhez hasonló törvények szerint. Ugyanaz a vonzási törvény, melyet *Bolyai János* csodálatraméltó éles elmével talált, képezi alapját az absolut térre általánosított potentialis elméletnek, melyről később még szólani fogunk.

Tudvalevőleg sok idő telt el, mig *Lobacsefszkij*nak és *Bolyai János*nak a geometria alapjaira vonatkozó fölfedezései a mathematikusok elismerésében részesültek. Ezért nem kell csodálkoznunk, hogy a geometrák még később bátorkodtak a többméretű sokaságok mechanikájába fogni. *Lipschitz* (1873-ban) ugyan nem ok nélkül állítá, hogy e nemű vizsgálatok valósággal igen régiek, mert visszavezethetők *Lagrange* analytikai mechanikájára (1788). Ugyanis egy nagy és fölötte fontos része a mechanikának oly mozgások kutatásából áll, melyek folyamán egy test-rendszer mindenkori helyzete véges számu független változó értékével van meghatározva. Hogy az ily rendszer mozgásának differentialis egyenleteit előállítsuk, *Lagrange* szerint elégséges a rendszer eleven erejének és a virtualis munkának kifejezését ismernünk. Ez utóbbi a változóknak vonalos differentialis alakja, melynek coefficienseit általános értelemben erőknek nevezzük; amaz pedig egy négyzetes differentialis alak, osztva az idő differentialisának kétszeres négyzetével. Ezt a négyzetes differentialis alakot egy sokaság vonaleleme négyzetének tekinthetjük, mely sokaságnak annyi dimensiója van, a mennyi a független változó, vagy mint azt az angol geometrák szerint mondani szokás, a mekkora a szabadság foka és így ahhoz a képzethez jutunk, hogy a rendszernek tekintetbe vett mozgása aequivalens egyetlen egy anyagi pont mozgásával, mely egy több dimensiós térben oly erő hatása szerint mozog, melyet a virtualis munka kifejezése szolgáltat. Ez az aequivalentia azon alapszik, hogy eme pont mozgásának differentialis egyenletei teljesen megegyezők a rendszer mozgásának differentialis egyenleteivel.

Igy p. o. a csillagászatban a három test problemája aequivalens egyetlen egy pont mozgásának problemájával egy kilencz dimensiós térben. Továbbá *Klein* és *Sommerfeld* szerint (1898), egy súlyos gömbi pörgetyű mozgása aequivalens egyetlen egy pont mozgásával, mely alkalmas erő befolyása alatt egy három dimensiós sphaericus térben mozog. Ha *Maxwell*nek (1873) és J. S. *Thomson*nak (1888) eljárása szerint rugalmas, elekromos, magneses, thermicus és chemiai parametrumok bevezetése által a mathematikai physika minden részében érvényességet tulajdonítunk a *Lagrange*-féle egyenleteknek, úgy az ily aequivalentiák még nagyobb számban fordulnának elő; ez úton jutunk a »mechanikai modellek« fogalmához, melyet különösen *Boltzmann* fejlesztett ki.

Már *Jacobi*nak az 1842—43. tanév téli felében tartott előadásaiban is megvannak nyomai annak, hogy a *Lagrange* féle differentialis egyenletek a többméretű sokaságok mechanikájának értelmében foghatók föl, noha *Jacobi* csak különös problemákra szorítkozik. Ez ugyan csak jóval később lett ismeretes, a midőn *Clebsch* ezeket az előadásokat 1866-ban kiadta. Én azt vélem, hogy *Jacobi* az általános ellipticus coordinaták fogalmából indúlt ki, melyet egy 1839-ben közzétett értekezésében képezett.

Liouville (1850, 1856) és *Minding* (1864) szintén közel jártak a *Lagrange*-féle egyenletek e felfogásához.

Miután *Beltrami* (1869-ben) kimutatta, hogy a a többméretű sokaságok geodaeticus vonalainak elmélete, egy felületre rendelt pont erőmentes mozgásának általánosítására alapítható, *Lipschitz*

(1872-ben) részletesen kifejti, miképen lehet egy véges szabadsági fokkal bíró rendszer mozgását egy oly »repraesentáló pont« mozgásával pótolni, mely egy az eleven erő kifejezése által meghatározott többméretű sokaságban oly erő hatása alatt mozog, mely a virtualis munka kifejezése által van adva. *Beltrami*nak és *Lipschitz*nek vizsgálatait későbben *Darboux* (1889-ben) újabb szempontokból és különböző kiegészítésekkel tárgyalta.

Noha a mathematikusok e módszer termékenységét becsülni tudták, a mi különösen dynamikai problémák analytikai aequivalensének vizsgálatában és a *Lie*-féle transformatio csoportok elméletének a mechanikára alkalmazásában mutatkozik, mire vonatkozólag *Painlevé*nek és a szerzőnek munkáit (1891—97) idézzük: mindamellett e képzetek szélesebb körben csak akkor törtek útat, a midőn *Hertz* azokat a »Principien der Mechanik« (1894) czímű művében győzedelmesen érvényre juttatta.

A rendszer minden configuratiójának egy pont felel meg az előbb említett sokaságban. De ha a rendszer mozgási állapotát e configuratióban teljesen le akarjuk írni, úgy meg kell adnunk egyes részeinek pillanatnyi sebességét és ehhez elégséges, hogy a független változók idő-deriváltjainak értékét, azaz a sebességi coordinatákat ismerjük. Előnyösebb azonban a sebességi coordinaták helyett bizonyos linearis összegeknek értékeit megadni, melyek az eleven erőnek a sebességi coordinaták szerint való partialis differentiálásából adódnak és melyek újabban impulsus coordinatáknak neveztetnek. A rendszer mozgási állapota, melyet az egyes részeknek helyzete és sebessége határoz meg, oly sokaságnak egy pontja által képviseltethető, melynek kétannyi dimensiója van, mint a mekkora a szabadság foka. Egy ilyen repraesentáló pont, mely már fellép *Poincaré*nek a három test problémájára vonatkozó vizsgálataiban (1890-ben), a mechanikai hőelméletben is jelentőségre tett szert. *Boltzmann* vizsgálataihoz csatlakozva, *Zermelo* (1900) és J. W. *Gibbs* (1902.) munkálkodtak e téren. Említést érdemel még, hogy a helyzeti- és az impulsus coordináták között fönnálló differentialis egyenletek az összenyomhatatlan folyadékok mozgásának vizsgálatában is föllépnek; e körülménynek a nevezett szerzőknél fontos szerepe van.

Azonban a geometrák nem szorítkoztak arra, hogy csak a repraesentáló pontoknak mozgását vegyék tekintetbe, hanem azzal a szabadsággal, mely egyéni joguk, a többméretű sokaságok mechanikáját a kutatás önálló tárgyának tekintették.

Mig tehát a vizsgálatuk alapját valamely többméretű sokaság képezte, melyben a vonalelem négyzete egy megadott négyzetes differentialis alak, első sorban egy oly anyagi pont mozgását tanúlmányozták, mely a sokaságban megadott erő hatása alatt mozog; erre a mozgásra ismét érvényesek a *Lagrange*-féle differentialis egyenletek. Ezután azt kérdezték, hogy a merev testek mozgására vonatkozólag *D'Alembert*től és *Euler*től fölállított elmélet átvihető-e többméretű sokaságokra, miben a kinematikával kezdve kell a statikához és a kinetikához előrehaladni. Azonban általában, mint már a görbe felületek példája mutatja, egy többméretű sokaságban merev rendszerek kinematikája nem származtatható, hanem bizonyos föltételeknek kell teljesűlniök, melyek lehetővé teszik, hogy merev rendszerek abban vagy szabadon, vagy bizonyos korlátok között mozoghatnak.

Az oly sokaságok meghatározásának kérdése, melyekben merev rendszereknek van kinematikájuk, tág mezőt nyit a geometráknak érdekes vizsgálatokra, melyek még annyiban is vonzók, hogy alkalmat szolgáltatnak a transformatio csoportok elméletének alkalmazására; mert a keresett sokaságok ép azok, melyekben a vonalelem négyzete folytonos transformatio csoportok által önmagába vezethető vissza. Miután *M. Lévy* (1878-ban) megkezdte, kinek képletei egyébiránt már részben *Massieu*nél (1861-ben) megtalálhatók, e téren dolgoztak még újabb időben *Cerruti* (1895), *Bianchi* (1897), *Ricci* (1898), *Cotton* (1899), *Bemporad* (1899), *Davisson* (1900), *Levi-Civita* és *Ricci* (1901); ezzel a három dimensiós térre vonatkozó vizsgálat, legalább valós változókra szorítkozva, teljes befejezéshez jutott.

A merev rendszerek kinematikájában az állandó görbületü sokaságoknak kiváló szerepük van, mert bennük tetszésszerinti merev rendszerek korlátlanul mozgathatók. Mint *Helmholtz*nak (1866, 1868) és *Lie Sophus*nak (1886, 1893) vizsgálataiból kitünik, ez a tulajdonság ama sokaságokra jellemző. Ebből, magyarázható, hogy a geometrák eddigelé csak az állandó görbületű sokaságokban vizsgálták a merev rendszerek mozgását; ezek között vannak az *Euklidesi* sokaságok is, melyek görbülete elenyészik; ezekről alább részletesebben szólunk.

Miután kifejtettük, hogy mit kell értenünk a többméretű sokaságok mechanikáján, áttérhetünk azokra az egyes problemákra, melyeket részletesebben vizsgáltak és pedig legelőbb szólani fogunk egyetlen pont vagy több pont mozgására vonatkozó vizsgálatokról, aztán pedig azokról, a melyeknek tárgyát merev rendszerek mozgása képezi. Mig amott azok a sokaságok, melyekben a pontok mozognak, igen különböző természetűek, itt kizárólagosan csak oly sokaságokat tárgyaltak, melyeknek görbülete állandó. Függelékképen felsorolunk még egyes vizsgálatokat, melyek a deformálható rendszerek elméletére vonatkoznak.

Egy pont mozgásának problémáját, arra az esetre, hogy az egy nyugvó középponttól oly erővel vonzatik, mely a távolságnak függvénye, *Binet* (1837-ben) három dimensioról tetszésszerinti sok dimensiora általánosította; később (1881-ben) *Combescure* tért vissza erre. *Schering* (1873-ban) azt az esetet tárgyalta, melyben az erő nem csupán a távolságtól, hanem a sebességtől is függ és *Ebert* (1902-ben) több egymást vonzó pontnak a mozgási problemájával foglalkozott. *Lipschitz* (1873), *Cayley* (1873) és *Killing* (1885) a bolygómozgást állandó görbületü térben vizsgálták és *Phragmén Poincaré*nek az *Euklidesi* térben a három test problemájára vonatkozó bizonyos tételeit ebben az értelemben fejtette ki.

Az állandó görbületű térben egy pont mozgásának néhány más problemáját tárgyalta *de Francesco* (1898), a ki egyáltalában megkisérlette az elemi mechanikának a tanát az általános mechanika e terére vinni át.

Hasznosnak bizonyultak egy pont mozgásának vizsgálatára a tetszésszerinti sok dimensiós *Euklidesi* térben az ellipticus coordinaták, melyeket *Jacobi* (1839-ben) vezetett be; ezek lehetővé teszik sok esetben a *Hamilton*-féle egyenlet interpretatióját, mely ekképpen a változók szétválasztása által quadraturákra vezethető vissza. E módszert tovább fejlesztették *Haedenkamp* (1841), *Schläfli* (1852), *Rosochatius* (1877) és *Rudio* (1898). A vonalelemnek általánosabb képletét, mely mellett az integratio a változók szétválasztása által eszközölhető, *Liouville* (1849) és a szerző (1891) adta. Említésre méltó, hogy *Darboux* (1898) több dimensiós *Euklidesi* terekben a confocalis másodrendű felületek helyett, melyek az ellipticus coordinatákat szolgáltatják, confocalis cycliseket alkalmazott. Csatlakozva *Weierstrass* (1866) és *Staude* (1887) vizsgálataihoz, a szerző (1891, 1900) dynamikai problémáknak a tőle 1891-ben fölfedezett osztályában behatóan megvizsgálta a változóknak az időtől függését; az ott föllépő, több változó többszörösen periodicus függvényeinek elméletét *Ahrens* (1895) fejtette ki részletesen. Végűl említsük még fel azokat az általános tételeket, melyeket *Painlevé* (1894) egy pont mozgására vonatkozólag a többméretű sokaságban fölállított. A négyzetes differentialis alakokról még számos vizsgálat van, melynek eredményei egyenesen alkalmazhatók a dynamikára; de mivel ezek jellege tisztán analytikai, e helyen nem akarunk róluk szólani.

A merev rendszerek mechanikáját illetőleg legelőbb a kinematikát és statikát, azután a potentialis elméletet és végűl a kinetikát akarjuk tárgyalni; e mellett mindig előbb a több dimensiós *Euklidesi* terekre leszünk tekintettel aztán az állandó görbületü terekre.

A kinematika képezi az átmenetet a geometriából a dynamikába. Szoros kapcsolata a geometriával a többek között abban nyilvánul, hogy a kettősgörbületű görbék *Euklidesi* elmélete kinematikai tárgyalásban különös csínnal építhető föl. Ezt a vizsgálati módszert *Hoppe* (1880), *Brunel* (1881), *Pirondini* (1890), *Landsberg* (1897), *Piccioli* (1898), *Lovett* (1900), *Hardy* (1902) átvitték oly görbékre, melyek több dimensiós *Euklidesi* térbe tartoznak. Ugyanígy vagyunk a görbe felületekkel és pedig a kinematikai módszert, melyet különösen *Darboux* (1887) alkalmazott három dimensiós *Euklidesi* térre, *Craig* (1898) és *Hatzidakkis* (1900) vitte át több dimensiós terekre. Ezzel kapcsolatban még megemlítendő, hogy *Lipschitz* a görbületi elméletet olyképen általánosította, hogy azt a vonatkozást használta fel, mely egy görbe vonalra vagy görbe felületre rendelt pont pályájának görbületi sugara és normális nyomása között áll fönn.

A több dimensiós *Euklidesi* térben mozgó merev testnek kinematikáját többen tanúlmányozták. Első-nek talán *Euler* (1770) nevezhető, ki, mint azt *Jacobi* egy 1849-ben fogalmazott de csak 1884-ben *Kortum*tól kiadott értekezésében megmutatta, a *Cartesiusi* coordinata rendszer transformatiójának képleteit négy és több dimensióra terjesztette ki. Valószínűleg *Jacobi*tól búzdíttatva, *Schlaefli* foglalkozott (1859, 1866) behatóbban e tárgygyal. Egy test mozgásával a négy dimensiós *Euklidesi* térben, újabb időben, *Jordan* (1875), *Cole* (1890), *Goodwin*, (1899), *Jahnke* (1902) foglalkozott, az öt dimensiós térben *Cannizzo* (1896), és az *n* dimensiós térben *Jordan* (1875), *Lipschitz* (1880, 1886, 1896, 1900), *Scheeffer* (1880), *Kox* (1881), *Schoute* (1891), *Study* (1891), *Vahlen* (1897, 1902), *Joly* (1898), *Whitehead* (1898). Figyelemreméltó, hogy e kutatások a complexus számok felsőbb elméletével érintkeznek.

Ezzel ellentétben a több dimensiós *Euklidesi* terek statikáját elhanyagolták. Itt csak *Schoute* (1902) említhető, ki erő-rendszerek reductiojával foglalkozott és *Chasles*nak meg *Möbius*nak ismeretes tantételeit általánosította.

Egészen másképpen áll a dolog az állandó görbületű terekkel; itt czélszerű lesz a statikával kezdeni.

Daviet de Foncenex (1767) megkisérlette, az oly erők összetételének törvényeit, melyek egy merev testre hatnak, lehetőleg egyszerű föltevésekből vezetni le. Két ugyanegy síkban fekvő, ugyanazon egyenesre merőleges és ugyanazon értelemben ható erő eredő intensitásának meghatározása, egy functionalis egyenletre vezette, mely teljesül, ha a meghatározandó függvényt egy állandóval teszszük egyenlővé. Ez úton az *Archimedesi* emeltyű törvényhez jutunk. De a mint *D'Alembert* (1773) és *Laplace* (1799) megjegyezték, eleget lehet tenni e functionalis egyenletnek úgy is, hogy a keresendő függvényt egy exponentialis kifejezéssel teszszük egyenlővé, s ha ezen megoldást megengedhetőnek tekintjük, szükségképen az absolut geometriához jutunk, a mint ezt *Genocchi* (1869) kimutatta. De mivel fordítva, ha az absolut geometriából indulunk ki, ugyanaz a törvény érvényes ezen erők összetételére nézve, következik, hogy a tizenegyedik *Euklidesi* axioma és az *Archimedesi* emeltyű-törvény vagy együtt fogadandó el, vagy együtt vetendő el. Ellenben az oly erők összetétele, melyeknek hatás vonalai egymást metszik, független a tizenegyedik axiomától, és az erőparallelogramma abban az értelemben az absolut geometriában is megmarad, hogy a szerkesztést végtelen kis térrészben végezzük. Nem különben független a parallelák axiomájától a virtuális munka elve is. Erről részletesebbet *Genocchi* (1869), *Lindemann* (1873), *Andrade* (1897), *de Francesco* (1899) értekezéseiben találhatunk.

Egy merev testre ható erők rendszere az *Euklidesi* mechanikában mindig helyettesíthető egyetlen egy erővel, mely egy tetszés szerint választható pontban hat és egy erőpárral, mely egyetlen egy végtelen kicsi és a végtelen távoli síkban ható erővel aequivalens. E reductio tanának megfelel egy merev test végtelen kis mozgásai összetételének a tana, a mely szerint ezek a mozgások mindig helyettesíthetők egyetlen egy forgatással oly tengely körül, mely tetszőlegesen választott ponton megy át és egyetlen egy translatióval. E mellett azoknak az egyeneseknek, melyek irányában az erők hatnak, megfelelnek a forgástengelyek, a végtelen távoli erőknek pedig a translatiók úgy, hogy a merev test statikája és kinematikája a dualitás vonatkozásait követi. Ha felhasználjuk a *Klein*-től (1871-ben) fölfedezett összefüggést az absolut geometria és a *Cayley*-féle projektiv mérték-meghatározás (1859) között, mely összefüggés szerint az absolut térnek mozgásai, oly projektiv transformatiókkal helyettesíthetők, melyekben az absolut másodrendű felület változatlanúl marad: meglepően egyszerű módon sikerül kifejteni a merev test végtelen kis mozgásainak elméletét állandó görbületű terekben és egyúttal a merev testre ható végtelen kis erők összetételének elméletét. E mellett kiviláglik, hogy az absolut mechanikában a különbség egyfelől a forgatások és eltolások között, másfelől az egyes erők és az erőpárok között eltünik, úgy hogy akár egy végtelen kis mozgás, akár — hogy egy *Plücker*-féle kifejezést használjunk, — egy végtelen kis dynamis coordinatáinak bármelyike, a többi öttel egyező jelentményű és szerepű.

Ennek megfelelően, a mint már előre jelezhetjük, a merev testek absolut kinetikájában a három súlyponti és a három felületi tétel helyett, hat egymással egyező jelentményű és szerepű tételt nyerünk, és míg az *Euklidesi* mechanikában a translatiókat és a forgatásokat sokszor egymástól elválasztva vizsgáljuk, addig az absolut mechanikában ily elválasztás sohasem lehetséges. Azon szerzők közűl, kik e tárgygyal foglalkoztak említendők: *Lindemann* (1873), *d'Ovidio* (1873), *Stahl* (1873), *Ricordi* (1882), *Heath* (1884), *Segré* (1885), *Klein F.* (1873, 1890), *Burnside* (1895), *Seiliger* (1897).

Az *Euklidesi* mechanikában oly elmélet fejlődött ki, melyben egy merev test végtelen kis mozgásait, valamint a dynamisokat is egységeseknek és fölbonthatatlanoknak tekintjük: ez a *csavarelmélet*, melyet *Ball* (1880—1890) alapított és *Study* (1902) jelentékenyen fejlesztett. Míg az *Euklidesi* mechanikában a csavarelméletet gyakran haszonnal alkalmazzuk, addig az absolut mechanikában mindig helyén van az, sőt nélkülözhetetlen, s így joggal fáradoztak azon a geometrák, hogy a csavarelméletet állandó görbületű terekre átvigyék. *Ball*-on kivül, kinek vizsgálatait *Gravelius* (1889) dolgozta át, tekintetbe jönnek itt *Clifford* (1876), *Buchheim* (1884), *Heath* (1884), *Kotelnikoff* (1895, 1899), *Burnside* (1889) és *Study* (1900, 1902).

Hogy a potentialis elmélet több dimensiós *Euklidesi* terekre átvihető, azt már *Green* (1833, 1835) észrevette; ő különösen az általános ellipsois potentialisával foglalkozott. Kimerítő vizsgálatokat tett erre nézve *Schläfli* egy értekezésében, mely az 1850—1853 évekből való, de a melyet csak 1901-ben adtak ki hátrahagyott irataiból; ő is úgy az anyaggal kitöltött, valamint a felületén anyaggal bevont általános ellipsois potentialisát vizsgálta különösen. *Green* után először *Neumann C.* (1867) közölt vizsgálatokat az általános potentialisra vonatkozólag. Őt követte *Kronecker* (1869), ki 1881- és 1891-ben visszatért e tárgyra és az általános ellipsois potentialisa számára igen csinos képletet vezetett le. Más szerzők: *Beltrami* (1869), *Betti* (1871), *Tonelli* (1875, 1882), *Cayley* (1876), *Gundelfinger* (1878), *Macher* (1878), *Gutzmer* (1890, 1893), *Schütz* (1895), *Dyck* (1898), *Poincaré* (1898). Különös eseteket tárgyaltak: *Hoppe* (1880) a gömböt, *Hobson* (1896) ellipsoidicus süvegeket és korongokat *Dixon* (1897) gyűrűalakú testeket és *Wirtinger* (1897) olyan testeket, melyeknek felülete sphaericus sokaságokgból áll.

Mint *Lipschitz* (1872) jelenti, már *Dirichlet* is foglalkozott azzal (1852-ben), hogy a potentialis elméletet átvigye a hyperbolicus térre; úgy látszik, hogy *Gauss* ösztönözte őt erre. Később *Schering* (1873) és tanítványai *Fresdorf* (1873), *Tonelli* (1875) és *Opitz* (1881) foglalkoztak ezzel a tárgygyal. A potentialis elméletnek positiv állandó görbületű terekre való kiterjesztésében, a mint *Klein F.* (1891) kimutatta, jelentékeny nehézségek merülnek fel. A sphaericus terekben ugyanis minden vonzó tömegnek megfelel az antipodicus pontban egy egyenlő nagyságú taszító tömeg, a mi ugyan különös, de nem képtelen. Az ellipticus terekben pedig az elemi potentialis szükségkép kétértékű volna, s ez nyilván ellentmond a mechanika alaptörvényeinek.

A merev testek kinetikájában előre szokták bocsátani az úgynevezett tömeg-geometriát, melyben arról van szó, hogy a tehetetlenség főtengelyeit, valamint a tehetetlenségi- és a deviatio nyomatékokat meghatározzuk. Az ellipticus terekre *Clifford* (1874) fejtette ki a tehetetlenségi főtengelyek elméletét, melyben ő *Hesse*-nek imaginarius képét vette kiindulási pontúl. Az *Euklidesi* geometriában ugyanis az imaginarius kép és a végtelen távoli imaginarius gömbi kör közös poláristetraederének a végesben fekvő három éle a három tehetetlenségi főtengely, míg a másik három éle a végtelen távoli síkban van. Az ellipticus térben a képzetes kör helyébe az absolut másodrendű felület lép, és e felületnek, és az imaginarius képnek poláris tetraedere szolgáltatja most a hat tehetetlenségi főtengelyt. A tehetetlenségi- és a deviatió-nyomatékokat még keveset vizsgálták; megemlítendők *Killing* (1885), *Hoppe* (1867), *Kantor S.* (1896).

Egy merev test egy pont körűli forgásának problémáját a több dimensiós *Euklidesi* térben *Cayley* már 1846-ban formulázta és módszert jelölt meg a mozgás differentialis egyenleteinek fölállítására. Tényleg csak *Frahm* származtatta le ezeket az egyenleteket 1873-ban. Ama föltétel mellett, hogy erők nem hatnak, bizonyos integralis egyenleteket is megadott és állítá, hogy a négy dimensiós térben, föltéve hogy a problema állandói között bizonyos vonatkozások vannak, az integratio quadraturákkal végezhető el. Ezután *Clifford* (1876) az erőmentes mozgás esetére megkisérlette a mozgás differentialis egyenleteit thetafüggvényekkel integrálni, melyeknek argumentumai vonalos függvényei az időnek. Megoldása azonban, mint *Killing* (1885) megjegyzi, csak specialis, mert nem tartalmaz elegendő számú tetszés szerinti állandót. Végre *Schottky* (1891) a négy dimensiós térre quadraturákban adta az általános megoldást.

A merev testek forgását állandó pozitiv görbületű térben először *Clifford* (1874) tárgyalta, a ki felállította a mozgás differentialis egyenleteit. Nemsokára megmutatta *Beltrami* (1876), hogy ezek az egyenletek az *Euler*-éivel hasonló alakra hozhatók. Ezután *Heath* (1884) a három dimensiós ellipticus térben foglalkozott egy merev test erőmentes forgásával és megkisérlette az integratiót thetafüggvényekkel keresztűl vinni; de nem kapta meg a kellő számú tetszés szerinti állandót. Végre *Volterra* vizsgálataiból indúlva ki, *de Francesco* (1900) a problema megoldását quadraturákkal megadta. Végezetűl meghatározta egy merev test erőmentes mozgását *Klein F.* a három dimensiós hyperbolicus térben (1897) a mellett a föltétel mellett, hogy a tömeg bizonyos különös módon van elosztva és *de Francesco* (1901) néhány oly mozgást vizsgált meg, a mely külső erők hatása alatt megy végbe és ekkor olyanféle föltételekre akadt, a melyek mellett a *Lagrange*tól és *Sonja Kowalewski*tól tárgyalt esetekben az integratió quadraturákkal elvégezhető.

Függelékképen legyenek megemlítve egyes vizsgálatok amelyek a deformálható testek mechanikájáról szólnak. A lánczvonal alakját állandó görbületű térre *de Francesco* határozta meg (1900).

Beltrami (1881-ben) oly módon állította föl azokat az egyenleteket, melyek egy isotrop rugalmas testnek egyensúlyát határozzák meg, hogy azok állandó görbületű terekre is érvényesek. Ehhez csatlakozva *Padova* (1889) a *Maxwell*-féle elméletet fejtette ki ugyanily terekre; e tárgygyal foglalkoztak még *Somigliana* (1888) és *Cesàro* (1894, 1896). Végre *Siebert* (1883) és *Hill* (1884) nehány oly hydrodynamikai problémát tárgyaltak, melyekben a dimensiók száma háromnál nagyobb volt.

A ki visszapillant az előadottakra, láthatja, hogy a többméretű sokaságok mechanikájával sok kiváló mathematikus foglalkozott. Ezen nem kell csodálkoznunk, ha meggondoljuk, hogy mily jelentősége van e tárgynak. Egyfelől ez az általánosítása a mechanikának nagy termékenységű heuristicus elvként jelentkezik. E mellett meglepő vonatkozásokat szolgáltat a geometria és analysis különböző részeihez, milyenek a complexus számoknak, a négyzetes differentialis alakoknak, a folytonos transformatio csoportoknak elmélete, a projektiv geometria, a vonalgeometria; és fordítva ezek az elméletek az által, hogy a többméretű sokaságok mechanikájával jutottak kapcsolatba, jelentékenyen haladtak előre.

Végre, és ez talán a legfontosabb, a többméretű sokaságok mechanikája által felismerjük, hogy oly theoremák, melyek az *Euklidesi* mechanikában elkülönülve, egymás mellett állókúl jelentkeznek, az általános mechanikában közös forrásból származnak és így a felsőbb és tágasabb szemléleti mód mélyebb betekintést nyújt a mechanikai törvények logicus kapcsolatába.

FÜGGELÉK.

A mathematikusok német egyesületétől a mathematikai és természettudományi karhoz intézett üdvözlő irat.

Den 11. Januar 1903.

Ew. Spectabilität!

Die hundertste Wiederkehr des Geburtstages von Johann *Bolyai*, welche die Franz-Josef-Universität Klausenburg am 15. d. M. festlich begeht, erweckt überall in der mathematischen Welt freudige Teilnahme, und namentlich in Deutschland findet diese Gedächtnisfeier lauten Wiederhall.

Hat doch grade in Deutschland zuerst Johann *Bolyai* volle Anerkennung gefunden. Es darf nur an die Worte von *Gauss* erinnert werden: »Ich halte diesen jungen Geometer v. *Bolyai* für ein Genie erster Grösse . . .« ; es braucht ferner nur darauf hingewiesen zu werden, dass der deutsche Mathematiker *Baltzer* im Jahre 1867 zuerst öffentlich nachdrücklich auf die Bedeutung des »Appendix« aufmerksam gemacht und dadurch den französischen Mathematiker *Hoüel* veranlasst hat, sich eingehender mit J. *Bolyai's* Untersuchungen zu beschäftigen; es möge schliesslich nur darauf hingedeutet werden, dass es in neuester Zeit ein deutscher Mathematiker, ein Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung war, der sich des Nachlasses von J. *Bolyai* angenommen und ihn späterer Zeit zugänglich gemacht hat.

Zwar sind inzwischen in den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie weitere Fortschritte erzielt worden; aber J. *Bolyai's* kühner Versuch wird für alle Zeiten seine Bedeutung behalten: mit jugendlichem Ungestüm hat er die Schranken der euklidischen Geometrie durchbrochen und Bahn geschaffen für die zahlreichen tiefgehenden Forschungen, welche über die Grundlagen der Geometrie in der neuesten Zeit so helles Licht verbreitet haben.

Dem bahnbrechenden Genius bei der Feier seines hundertsten Geburtstages unsere Huldigung darzubringen, ist uns ein aufrichtiges Bedürfnis, und wir beglückwünschen die Franz-Josef-Universität zu dem Entschlusse, das Gedächtnis dieses grossen Sohnes der Stadt Klausenburg durch eine Feier lebendig zu erhalten und zu ehren!

Im Namen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung:

F. Klein, dz. Vorsitzender.

A. Gutzmer, dz. Herausgeber des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Seiner Spectabilität dem Decan der Mathemat.-Naturwiss. Fakultät der Franz-Josef-Universität

Herrn Professor *Dr. Julius Farkas*

zu Klausenburg.