

## ÖSSZEFÜGGÉS-MEGÉRTÉS

**Nagy József**

*Szegedi Tudományegyetem, Pedagógiai Tanszék*

Mindennapi létünk, aktivitásunk összefüggések szándéktalan, szándékos használatának köszönhető. Az iskolai oktatás nap mint nap összefüggések sokaságát használja. Az oktatásra szánt ismeretek jórészt összefüggésekre vonatkozó ismeretek. Az oktatás és a tanulás nagyrészt összefüggések tanítása, tanulása. Mindeközben magáról az összefüggésről, az összefüggés-ismeretről, az összefüggés-megértésről, ennek mint tudásszerző, tanulási készségnek a természetéről, fejlődéséről, fejlesztésének lehetőségéről, feladatairól az oktatás gyakorlata jóformán semmit sem tud. Az összefüggés-megértés készségének eredményesebb fejlesztése nagymértékben hozzájárulhatna a tudásszerző, a tanulási képesség fejlődéséhez, a tanításra szánt összefüggések mélyebb, alaposabb megértéséhez, elsajátításához, sikeresebb alkalmazásához, a kognitív világtudat alapozásához.

A Tanszékünk mellett működő Akadémiai Képességkutató Csoport keretében folyó kutatás azt a célt szolgálja, hogy hozzájáruljon az előző mondatban felsorolt lehetőségek és feladatok megismeréséhez, hasznosításuk, működtetésük előkészítéséhez. A téma kutatása a Tanszéken a nyolcvanas években kezdődött (lásd *Nagy*, 1985. 5. fejezet, valamint *Nagy*, 1990. 3–5. fejezeteit). A kutatás a kilencvenes évek második felében folytatódott (lásd *Csapó*, 1998. 6–9. fejezeteit, valamint *Nagy*, 2000a. Második részének fejezeteit). Ezekre az előzményekre támaszkodó kutatás az összefüggés és az összefüggés-ismeret sajátosságainak, működésének, használatának jobb megértését, az összefüggés-megértési készség fejlődésének reprezentatív feltérképezését szolgálja, valamint egy négyéves kísérlet egyik részeként az összefüggés-megértés fejlesztésének lehetőségeit vizsgálja.

Mindezek alapján ez a tanulmány előbb az összefüggés és az összefüggés-ismeret elméleti alapjait ismerteti. Majd az összefüggés-megértést jellemzi. Ezt követően kerül sor az összefüggés-megértési készség fejlődésének bemutatására. Végül a fejlesztés lehetőségeiről, feladatairól és módszereiről lesz szó.

### **Meghatározottság és összefüggés**

A filozófia két alapkérdése: mi és milyen a létező világ, amire a lételmélet (ontológia), mi és milyen a megismerés, amire a megismerés-elmélet (episztemológia, gnoszeológia) keresi a választ. Annak ellenére, hogy ez a megkülönböztetés több mint kétezer év óta ismert és folyamatosan hangoztatott igény, mind a mai napig nem valósult meg a követ-

kezetes megkülönböztetés és egymásra vonatkoztatás (csak részlegesen alakult ki a szükséges fogalmi, terminológiai eszközrendszer). Mivel ezt pedagógiai, nevelési szempontból alapvető jelentőségűnek tartom (a kifejtést lásd később), törekedni fogok e megkülönböztetés és egymásra vonatkoztatás következetes alkalmazására, a fogalmi, terminológiai eszközök keresésére. Ennek a törekvésnek megfelelően a fenti címben szereplő *összefüggés* a létező világ valóságos vagy vélt összefüggéseit nevezi meg, az *összefüggés-ismeret* pedig az összefüggésre vonatkozó tudásunkat jelöli.

E két alapkérdés részletes kutatását fokozatosan átvették a szaktudományok. A lélelméleti témákat a természettudományok, a társadalomtudományok, az embertudományok, a megismerés-elméleti kérdések részletes kutatását pedig a logika, a pszichológia, újabban a kognitív forradalomnak köszönhetően a multidiszciplináris megismeréstudomány (kognitív tudomány). A szaktudományok kutatói nem foglalkoztak e két problémakör általános, filozófiai szintű kérdéseivel, ez a filozófusok feladata maradt. A XX. században azonban olyan felismerésekre jutottak a fizikai kutatások (a relativitáselmélet és a kvantumelmélet megszületésével), amelyek a korábbi szemléletmódokkal értelmezhetetlenek voltak. Mivel a filozófia hagyományos ismeretei nem segítettek, maguk a fizikusok kezdtek filozófiai szintű kérdésekkel foglalkozni. *Von Weizsäcker* ezt 1954-ben így fogalmazta meg: „Tapasztalati tény, hogy korunk majdnem minden vezető elméleti fizikusa filozófál is” (16. o.). Még nem egészen tudatosult, hogy a megismeréstudomány terén jelenleg hasonló folyamatok zajlanak: a kognitív forradalom különböző szaktudományainak vezető kutatói olyan felismerésekre jutottak, amelyek a korábbi szemléletmódokkal nem értelmezhetők. Közöttük sokan filozófiai problémákkal is foglalkoznak, ilyen műveket is publikálnak.

Ezek a gyökeres változásokat eredményező felismerések pedagógiai szempontból is lényegbevágóak. Azáltal, hogy feltárultak a természet átfogó elvei, a fizika, a kémia és a kozmológia széttagolt tudástömege egységes természeti világgépet kínál. Az iskola ennek ellenére továbbra is a XVIII–XIX. századi világgépet terjeszti. Hasonló helyzet kezd kialakulni a megismerésre, a gondolkodásra, a tanulásra vonatkozó tudásunk terén is. Miközben a kognitív, az informatikai forradalom lényegesen gazdagítja, módosítja a kognícióval kapcsolatos ismereteinket, világgépünket, az iskolai nevelés a XX. század közepe előtti szemléletmód szerint működik. Ez a dolgozat egy résztémához kapcsolódva tulajdonképpen ezekről az új lehetőségekről és feladatokról szól. Ebben a fejezetben az összefüggés mint ontológiai téma, a következőben pedig az összefüggés-megismerés mint episztemológiai téma elméleti alapjai szerepelnek.

## Összefüggés

A meghatározottság (determinizmus) a filozófiai gondolkodás kezdetétől a XX. századig oksági determinizmusként dominált. Ez azt jelenti, hogy a világon minden dolognak és változásainak oka van. Az oksági meghatározottság (az oksági összefüggés) egyértelműen, szükségszerűen váltja ki, eredményezi az okozatot. Csak oksági meghatározottság létezik, ami mindig valamilyen változást eredményez, amely egyértelműen, szükségszerűen megvalósul, a véletlennek, a valószínűségnek nincsen szerepe. A kezdetektől megjelentek ugyan elméletek a véletlenről, a nem oksági meghatározottságról, de

ezek a XX. század előtt nem tudták számottevően csökkenteni az oksági determinizmus dominanciáját. Ha az oksági determinizmusból levezetett szélsőséges nézeteket és a csapdákat el kívánjuk kerülni, elegendő abból a tényből kiindulni, hogy *léteznek összefüggések*.

Ebből kiindulva nem állítható, hogy csak meghatározottságok, összefüggések léteznek, az sem, hogy ezek csak okságiak lehetnek, továbbá nemcsak a szükségszerű, hanem a valószínű meghatározottság, összefüggés is megengedett. Végül: a determinizmus, a meghatározottság megnevezés helyett az összefüggés szót fogom használni. Feltételezésem szerint az összefüggés a determinizmusnál szűkebb kategória, mivel nem tartalmazza a könyvek sokaságában olvasható igen sokféle értelmezést. Azt nem tudom, és nem is tartom szükségesnek kifejtteni, hogy miben különbözik a determinizmus és az összefüggés. Csak arra vállalkozom, hogy lehetőleg egyértelműen leírjam, jellemezzem az összefüggést:

*Az összefüggés az  $F$  feltétel és a  $V$  velejáró olyan kapcsolata, amelyben valahányszor az  $F$  feltétel fennáll vagy előáll, a  $V$  velejáró mindannyiszor valószínűleg fennáll vagy előáll. (Szándékosan használom a „velejáró” megnevezést, mert a szokásos „következmény” kifejezés az okozatra utal, az együttjáró összefüggést kizárja. Ezzel szemben a „velejáró” speciális esetként magában foglalja az okozatot is. A kifejtést lásd később. Továbbá szándékosan nem a szokásos „ha...akkor” formulát, feltételes mondatot használom, hanem a „valahányszor...mindannyiszor” fordulatot. Az indoklás később esedékes.)*

Az értelmezés szemléletessége érdekében vegyünk egy köznapi tapasztalatnak megfelelő példát. „Elengedtem a radírt (megszüntettem az alátámasztását), a radír leesett.” Ez a kijelentés nem összefüggést ír le, hanem egy eseményre vonatkozó tényállítást, tényismeretet. Eme rendszeresen tapasztalt esemény úgy értelmezhető, hogy „valahányszor elengedem a radírt, az mindannyiszor leesik”. Ez a kijelentés már összefüggést ír le. Igen gyakori hiba: valamely *összefüggés* és *aktuális megnyilvánulásának* összekeverése, egybemosása. Még súlyosabb hiba két dolog alkalmi együttes előfordulását összefüggésnek minősíteni.

A fenti fogalmazás mindenféle összefüggésre vonatkozik. Ámde az *általában vett összefüggés* absztrakció, csak konkrét tartalmú összefüggések léteznek. A valóságos összefüggés valamely  $F$  feltétel nélkül nem létezhet. Példánk esetében ez a feltétel a radír elengedése. Ez valamely *dolog* (rendszer, egység, entitás): a radír és annak *sajátsága* (tulajdonsága, komponense, működése, viselkedése, változása): az alátámasztás megszűnése. A  $V$  velejáróra ugyanez érvényes. A *dolog*: radír, a *sajátság*: leesés. A *dolog* mibenléte gyakran homályban marad. Ez nehezíti a megértést és az alkalmazást.

A példában egy adott radírról volt szó. De vonatkozhat az összefüggés bármely radírra, sőt bármely testre. Ez a szokásos *fogalmi általánosítás/szűkítés*, más szóval az *összefüggés érvényességi körének* bővítése/szűkítése.

Az összefüggést érvényességi köre mellett egy másfajta általános is jellemzi: a *korlátlan számú érvényesülés*. Valahányszor  $F$ , mindannyiszor valószínűleg  $V$ . A korlátlan számú érvényesülés lehetőségét mint az összefüggés alapvető sajátságát nem szokás explicit módon figyelembe venni, kifejezni. Ez magától értetődőnek minősül. Holott

nem az, különösen nem az a tanulók számára. Ezért pedagógiai szempontból ennek a „beleértett általánosnak” a rendszeres megnevezése kívánatos.

Végül létezik egy harmadik fajta kiterjesztés is. A radír alátámasztásának megszűnése a leesés elsődleges, felszíni oka. A mélyebben fekvő ok a Föld tömegvonzása. Ez a fajta kiterjesztés az *oksági láncok* igen bonyolult problémájához vezet. Mint más vonatkozásban később is utalok rá, ebben a tanulmányban az oksági lánc kérdéseivel nem foglalkozom.

A (1) „fennáll vagy előáll” feltételre és velejárójára vonatkozó előírás azt jelzi, hogy az *okság* mellett *nem oksági* összefüggés is létezik. A (2) „valószínűleg” azt jelenti, hogy összefüggésről csak akkor beszélünk, ha elegendő számú eset alapján az összefüggés szignifikánsnak minősíthető (a korrelációszámítás általánosan elfogadott feltételei szerint). Mivel a valószínűség, illetve a korrelációs együtharó értéke speciális esetben 1 is lehet, ezért a biztosan fennálló vagy előálló velejárójú, más szóval a *szükségszerű összefüggés* a valószínű összefüggések speciális esete. Az (3) „*F* feltétel” és a „*V* velejáró” kifejezések több feltételt és több velejárót is megengednek. Ebből adódóan pedig az úgynevezett (4) „*csak-akkor*” (akkor és csak akkor, ha) és „*nemcsak-akkor*” (ha akkor) *feltételű* (más megnevezésekkel: szükséges és elégséges, szükséges, de nem elégséges feltételű), összefüggésre is vonatkozik a fenti meghatározás. (E bekezdés négy témájáról lásd az *Összefüggésfajták* című részt.)

### **Összefüggésfajták**

A szakirodalomban sokféle összefüggés fordul elő. Másfajták az összefüggések a newtoni fizika világában, a kvantumelmélet mikrofizikai világában, a társadalmi folyamatokban, az emberi viselkedésben, az egyenletek, a függvények által leírt kapcsolatokban és így tovább. Ezek a tartalmi szempontú összefüggésfajták. Tartalom nélküli összefüggés ugyan nem létezik, olyan összefüggés-elmélet azonban előnyös lehet, amely bármiféle tartalmú összefüggésre érvényes. Ezért a tartalmi szempontú összefüggésfajtákkal nem foglalkozom. Egyébként az egymással szembenálló, egymást kizáró elméletek eddigi története az egyetemes érvényre való törekvést mutatja (lásd például az oksági determinizmust, az okságot és a meghatározottságot tagadó elméleteket).

Eddig az összefüggésről és az összefüggés általános struktúrájáról volt szó. Most a struktúra szerinti összefüggésfajták ismertetésére kerül sor, amelyek együtt mindenfajta tartalom sajátosságainak megfelelnek. Az integrációra törekvés már *Bunge* könyvében (1959) megjelenik. A struktúra szerinti összefüggésfajták számbavétele ezt a szándékot követi. Ezt megelőzően azonban még szükségünk van a realitás és a komplexitás szerinti összefüggésfajták figyelembevételére is.

#### *Reális, hipotetikus és fiktív összefüggések*

Pedagógiai szempontból kívánatos különbséget tenni a címben felsorolt összefüggések között. Ugyanis a babonák, a hiedelmek, a kuruzslások, a csillagiósítások, a képtelen ideológiák és hasonló fikciók elfogadásának, terjedésének többek között az az oka, hogy

nem tanultunk meg különbséget tenni a reális, a hipotetikus és a fiktív összefüggések között.

A kvantumelméletet alapozó, vizsgáló empirikus kutatások olyan jelenségeket tártak föl, amelyek a realitással szembeni kételyeket is táplálták. *Schrödinger* például Mi a „reális”? című tanulmányában 1960-ban ezt írta: „Az idea önmagában tudati konstrukció, s a legkevésbé sem vonjuk kétségbe. Elsősorban csupán azzal az állítással szállunk szembe, hogy kívülről vagy mellette kell léteznie olyan tárgynak, amely létrehozza a kérdéses ideát. Ez ugyanis szerintem teljesen fölösleges kettőzés volna, ...” (283–284. o.). Az ideákat (fogalmakat, szabályokat) természetesen nem a dolgok (tárgyak) hozzák létre, hanem a nyelvnek, a tudatnak köszönhetően mi konstruáljuk. Az ideák, közönségesen szólva a tudásunk neurális hálózatok vagy például papírra rögzített formában létező realitások. Így a tudásra mint realitásra vonatkozó tudásunk, a metatudás is realitás.

Az ember olyan ideák konstruálására is képes, amelyek reálisan nem létező dolgokra vonatkoznak. Például az elképzelt mesehősök, *Zeusz*, a csillagióslás. Ezek az ideák *fikciók*, mert nem léteznek az a dolog, amire vonatkozhatnának, illetve ha a dolog létezik, nem létezik az a sajátsága, amivel jellemezzük. A jelölet, a denotátum léte nem igazolható. Az ilyen ideánk, tudásunk *érvénytelen*. Ha ideáink olyan dolgokra, sajátságokra, összefüggésekre vonatkoznak, amelyek nem léteznek, de feltételezhetően létezhetnek, illetve a jövőben realizálódhatnak, akkor hipotetikus, potenciális dolgokról, sajátságokról, összefüggésekről beszélhetünk.

Összefoglalva: a reális, a hipotetikus és a fiktív összefüggés, valamint ennek megfelelően a háromféle összefüggés-ismeret, szabály (törvény, függvény, norma és hasonlók) között kívánatos különbséget tenni. Mivel a dolgok, sajátságok létezését gyakran nehéz verifikálni, illetve predikció érvényesülésével, dedukcióval igazolni, ezért a meggyőződésnek igen nagy a szerepe, a nevelésnek pedig a felelőssége abban, hogy mely összefüggés-ismeretekről milyen meggyőződés alakul ki: realitásnak, hipotézisnek vagy fikciónak hisszük-e a szóban forgó összefüggést. A reális összefüggések mellett a hipotetikus és a fiktív összefüggéseknek is alapvető szerepük van az ember életében, fejlődésében, a megismerésben. Némi túlzással azt mondhatjuk: attól vagyunk emberek, hogy hipotézisek, fikciók alkotására is képesek vagyunk. A probléma, esetleg a tragédia abból származik, ha a fikciót, a hipotézist realitásnak hisszük vagy megfordítva.

#### *Komplexitás szerinti (elemi, egyszerű és összetett) összefüggések*

Az összefüggések bonyolultsága, komplexitása igen különböző lehet. A megértés szempontjából ez a tényező fontos szerepet játszik. Ezért hasznos lehet a komplexitás néhány jól kezelhető fokozatát valamilyen szempontok szerint meghatározni. Ezt szolgálja a címben szereplő három bonyolultsági fokozat. Ezek meghatározásának szempontja a feltételek és a velejárók mennyisége, valamint a munkamemóriánk korlátját leíró, 1965-ben megjelent *Miller*-féle törvény. (Maximálisan 5–9 elemet, információcsomagot vagyunk képesek elemekből álló egységként kezelni. E korlátot a tarsolyelvvel uralhatjuk: Néhány elemet címkével látunk el, például megnevezzük, és ez a címke most már csak egy elem, ha ezekből is elértük a korlátot, a címkéket is felcímkézzük és így tovább.)

Az *elemi összefüggésnek* csak egyetlen feltétele és a feltételnek csak egyetlen velejárója van. Ilyen összefüggés van a kör sugara és kerülete között, valamint ilyen a „megszűnő alátámasztás miatt leeső test”. Az elemi összefüggést leíró szabályban szereplő fogalmak mennyisége sem nagyobb a Miller-törvényben előírtnál. E fogalmakat leíró fogalmak mennyisége a „visszafelé haladó tarsolyelvvél”, a fokozatos bővüléssel kezelhető. (Az összefüggésekben szereplő fogalmak értelmezésére később visszatérek.)

Legyen a valahányszor  $F$  feltétel jele  $v(F)$ , a mindannyiszor  $V$  velejáró jele  $m(V)$ , továbbá a közöttük lévő kapcsolatát egy összekötő vonal  $—$ . E jelekkel az elemi összefüggés általános struktúrája:

$$v(F)—m(V).$$

Amennyiben az összefüggés egynél több feltételű, illetve egynél több velejárójú, akkor tisztázni és jelölni kell a feltételek, illetve a velejárók közötti viszonyt. *Bunge*, (1959. 163–167. o.) javaslatát és az ezzel megegyező saját elgondolását (*Nagy*, 1985. 223. o.) fogom követni. E szerint a logikától kölcsönvett konjunkcióval (és-sel), valamint diszjunkcióval (vagy/és-sel) fejezzük ki, jelöljük a feltételek közötti és a velejárók közötti viszonyt. A konjunkció szokásos jele:  $\wedge$ , a diszjunkcióé:  $\vee$ .

Az *egyszerű összefüggés* csak konjunktív kapcsolatokat tartalmaz. Három eset lehetséges:

$$\text{Csak a feltétel többemű: } v(F_1 \wedge F_2 \dots \wedge F_n)—m(V).$$

$$\text{Csak a velejáró többemű: } v(F)—m(V_1 \vee V_2 \dots \vee V_n).$$

$$\text{A feltétel is és a velejáró is többemű: } v(F_1 \wedge F_2 \dots \wedge F_n)—m(V_1 \wedge V_2 \dots \wedge V_n).$$

A kijelentések konjunkciója a logikában azt jelenti, hogy az összetett kijelentés csak akkor igaz, ha a benne lévő valamennyi kijelentés igaz. *Ez az összefüggésre vonatkoztatva úgy értelmezhető, hogy a többemű feltétel csak akkor válik feltétellé, ha valamennyi elem fennáll vagy előáll. Hasonlóképpen: a többemű velejáró csak akkor válik velejáróvá, ha valamennyi eleme fennáll vagy előáll.*

Egy példa: Valahányszor a kristályban a rezgő mikrorészecskék energiája túllépi a kötési energiát, a részecskék mindannyiszor kilépnek a kötélekből, és a kristály megolvad.

$F$ : a kristályban a mikrorészecskék energiája túllépi a kötési energiát,

$V_1$ : a részecskék kilépnek a kötélekből, és

$V_2$ : a kristály megolvad.

$$\text{Formalizálva: } v(F)—m(V_1 \wedge V_2).$$

Az *összetett összefüggésekben* a kapcsolatok diszjunktívek vagy vegyesek (konjunktív és diszjunktív kapcsolatok is előfordulnak). A tisztán diszjunktív struktúrájú összefüggéseknek is három változata lehetséges. Csak az  $\wedge$  jeleket kell felcserélni  $\vee$  jelekre. *A diszjunktív kapcsolatú feltételek, illetve velejárók akkor válnak feltétellé, illetve velejáróvá, ha legalább egy, több vagy valamennyi feltétel, illetve velejáró fennáll vagy előáll.*

Egy példa: Valahányszor röntgensugárzásnak teszik ki a kristályokat, az atomok  $V$ -vagy  $L$ -héjából mindannyiszor elektronátmenetek jönnek létre.

$F$ : a kristályokat röntgensugárzás éri,

$V_1$ : az atom  $V$ -héjából elektronátmenetek jönnek létre, vagy

$V_2$ : az atom  $L$ -héjából elektronátmenetek jönnek létre.

$$\text{Formalizálva: } v(F)—m(V_1 \vee V_2).$$

Az összefüggések komplexitásáról ennyi ismeret segítségével rátérhetünk a következő pontokra.

*Csak-akkor és nemcsak-akkor feltételű összefüggések*

Lehetséges, hogy az  $F$  feltétel egyelemű vagy csak konjunkcióval (és-sel) kapcsolva többelemű, és további feltétel nem jöhet szóba. Az ilyen összefüggés ismerete lehetővé teszi, hogy az  $F$  feltétel fennállása, előállása esetén megjósolhassuk: mi, illetve mi lesz a velejáró. És megfordítva. Ha a velejáró fennáll vagy előállt, akkor eleve, *bizonyosan* tudhatjuk, hogy mi volt a feltétel, az előálló velejárónak (okozatnak) mi a magyarázata. Más szóval: a becslés mindkét irányban lehetséges. Az ilyen összefüggés esetén szokás azt mondani, hogy „akkor és csak akkor, ha” vagy azt, hogy „szükséges és elégséges feltétel”. Az iskolában ezek az elnevezések nehézséget okoznak. Ezért használjuk a „*csak-akkor feltételű*” megnevezést, amely egyértelműbb és könnyebben értelmezhetőnek bizonyult. Ennek figyelembevételével a bizonyosság, a csak-akkor feltétel jele a felkiáltójel legyen:  $\nu(!F)$ . Az egyszerűség érdekében a továbbiakban ezt a jelet fogom használni.

A kör sugara és kerülete közötti összefüggés csak-akkor feltételű.

Formalizálva:  $\nu(!F) \text{---} m(V)$ .

Amennyiben a feltétel többelemű és az elemek között létezik legalább egy diszjunktív (vagy/és) kapcsolat, akkor aktuálisan legalább egy vagy/és-sel kapcsolt feltétel áll fenn vagy nyilvánul meg és ettől függ a velejárója. Ez a fajta összefüggés lehetővé teszi, hogy az aktuális feltétel ismeretében megjósoljuk a velejáróját, de a velejáró ismerete alapján nem tudunk egyértelmű magyarázatot adni. Ha ismerjük a szóba jöhető diszjunkt feltételeket, valószínű magyarázatot találhatunk. Ezt a fajta feltételű összefüggést nevezi meg a „ha, akkor”, valamint a „szükséges, de nem elégséges feltétel” kifejezés. Pedagógiai megfontolásokból ezt a fajta bizonytalan feltételű összefüggést „*nemcsak-akkor feltételűnek*” nevezzük, és szimbóluma legyen a kérdőjel:  $\nu(?F)$

Példa: valahányszor előfordul, hogy valamely állat meghatározott ideig nem jut táplálékhoz, mindannyiszor elpusztul, de nemcsak ekkor (számos más feltétel esetén is elpusztulhat).

Formalizálva:  $\nu(?F) \text{---} m(V)$ .

Összefoglalva: A feltétel, a magyarázat szempontjából kétfajta összefüggés között tehetünk különbséget. *Csak* egyetlen vagy több konjunktív feltétel esetén áll fenn vagy áll elő a velejáró, minden más feltétel kizárt. Ezt nevezzük *csak-akkor feltételű összefüggésnek*,  $(!F)$ . Ha viszont *nem csak* az aktuálisan fennálló, előálló feltétel esetén, hanem más feltételek esetén is fennáll, előáll a velejáró, akkor az összefüggés *nemcsak-akkor feltételű*,  $(?F)$ . (A „csak-akkor” és a „nemcsak-akkor” megnevezés használatának nem csak pedagógiai, hanem elvi indoka is van, ami az okságról szóló rész alapján adható meg.)

*Oksági és együttjáró összefüggések*

A tanulmány elején az oksági determinizmusról szólva felidéztem azt a XX. századig domináns meggyőződést, mely szerint a dolgok, az események meghatározottak, min-

dennek megvan a maga oka. A meghatározottság, a törvény ismeretében az ok alapján következtetni lehet az okozatra, az okozatból pedig megállapítható az ok, vagyis megmagyarázható az okozat létrejötte. A nem oksági meghatározottságok, összefüggések létezése nem vált elfogadottá.

A kvantumelméleti felismerések, értelmezésének problémái megkérdőjelezték az oksági elv általános érvényességét. Sőt az okság létét kétségbe vonó szélsőséges nézetek is születtek. Bohr már 1938-ban így fogalmazott: „Elvetve minden, a tudomány szellemétől idegen misztikát, a komplementaritási felfogást az oksági elv logikus általánosításának kell tekintenünk” (43. o.). Ez a megfogalmazás nem tagadja az oksági elvet, de azt a komplementaritás (a nem oksági összefüggés) speciális esetének tekinti. Az oksági és nem oksági meghatározottságok, összefüggések ilyen értelmű, egyik legjobb korai részletes kifejtése Bunge könyvében olvasható (1959). Hasonló szellemű könyv magyar kutató tollából is született (Müller, 1979). Ennek a ma már széleskörűen elfogadott felfogásnak megfelelően a fenti gondolatmenethez kapcsolódva az alábbiak fogalmazhatók meg.

*Az okság események közötti összefüggés, amelynek meghatározó sajátága, hogy a feltétel ok, a velejárója pedig következmény (okozat). Az  $O$  ok időben előbb bekövetkező (előálló) és valamilyen változást előidéző (kiváltó, aktiváló, eredményező) hatás, a  $K$  következmény (az okozat) pedig az ok által előidézett (előálló) változás, eredmény. Az ok és az okozat nem felcserélhető (nem kommutatív, aszimmetrikus).*

Az oksági összefüggés kölcsönhatás. A következmény létrejötte nemcsak az októl mint hatástól függ, hanem különböző mértékben annak a dolognak (rendszernek, entitásnak) a sajátosságaitól (állapotától, viselkedésétől, struktúrájától, működésétől) is, amelyben a változás bekövetkezik. Ennek figyelembevételével is az okság nem kommutatív, aszimmetrikus összefüggés: az ok az előidéző, az okozat a bekövetkező változás. Az ok és a következmény nem felcserélhető. Például az élelem nélkül elpusztuló állat esetében az elpusztulás nem lehet az ok, az élelemhiány pedig a következmény. Ha az ok jele az  $O$ , az okozaté, a következményé a  $K$ , a fölcserélhetetlenségé pedig az egyirányú, a következményre mutató nyíl, akkor az összefüggés mint okság így fejezhető ki:

$$v(O) \rightarrow m(K).$$

A nem oksági összefüggéseknek különböző nevei találhatók a szakirodalomban. Kialakulóban van egy általánosan elfogadható megnevezés: együttjárás.

*Az együttjárás olyan kapcsolat a feltétel és a velejárója között, amely kapcsolatban valahányszor az  $F$  feltétel fennáll, előáll, a  $V$  velejáró is mindannyiszor valószínűleg fennáll, előáll, de a feltétel nem hoz létre (nem aktivál, nem vált ki) változást a velejáróban, továbbá a feltétel és a velejáró felcserélhető (kommutatív, szimmetrikus).*

Az oksági összefüggésre is érvényes, hogy az  $F$  feltétel fennállása, előállása esetén a  $V$  velejáró is valószínűleg fennáll, előáll. Csakhogy az okság események közötti összefüggés, az ok előidejű, a következmény előállását az ok idézi elő, az ok és az okozat nem fölcserélhető. Az okság e négy megkülönböztető jegyétől eltérően az együttjárásnak csak két specifikuma van: a feltétel és a velejáró fölcserélhetősége, vagyis a kommutativitás és az, hogy a feltétel nem vált ki változást a velejáróban. Ennélfogva az okságot érdemes sajátos fogalomrendszerrel is önálló összefüggésfajtaként kezelni. Mivel az együttjárás csak két meghatározó sajátosságával tér el az általában vett összefüggéstől, ezért az



együttjáró összefüggés második tagjaként az okozat, a következmény helyett az általános megnevezés: a  $V$  velejáró használható. Az együttjárás feltétele pedig  $F$  feltételnek nevezhető. Ezáltal egyértelmű az okságtól való megkülönböztetés. Az együttjárás másik sajátosságát, a fölcserélhetőséget a kétirányú nyíl jelölje az általános összekötő vonal helyett. Ezáltal pedig egyértelmű a megkülönböztetés az együttjárás és az általában vett összefüggés között. (Lásd az alábbi példát.)

Például a kör sugara ( $F_s$ ) és a kerülete ( $V_k$ ) közötti összefüggés együttjárás. Sem a sugár nem oka a kerületnek, sem a kerület nem oka a sugárnak. Igaz viszont, hogy valahányszor fennáll, adott a sugár hossza, mindannyiszor fennáll, adott a kerület hossza is. A kör kerülete is lehet feltétel:  $F_k$ , a sugár pedig velejáró  $V_s$ , hiszen a kerületből kiszámítható a sugár. Ez az összefüggés csak-akkor feltételű együttjárás.

Formalizálva:  $v(!F_s) \leftrightarrow m(V_k)$ .

Fölcserélve:  $v(!F_k) \leftrightarrow m(V_s)$ .

Összefoglalva: A feltétel és a következmény közötti viszony szerint az összefüggés kétfajta lehet: együttjárás és okság. Az együttjárás feltétele és velejárója felcserélhető és a feltétel nem előidézője a velejárónak. Az együttjárás lehet állapotok vagy események közötti összefüggés is, és a feltétele lehet előidejű vagy egyidejű is (vagyis e két utóbbi szempont szerint nincsen eltérés az általában vett összefüggéstől). Ezzel szemben az okság események közötti összefüggés, az ok előidejű és a következmény előidézője; az ok és az okozat nem fölcserélhető. (Az „akkor és csak akkor, ha”, vagyis az ekvivalencia és a „ha akkor”, vagyis az implikáció helyett azért egyértelműbb a „csak-akkor feltétel” és a „nemcsak-akkor feltétel” kifejezések használata, mert az ekvivalencia kommutatív, az implikáció pedig nem. Láthattuk, hogy az okság nem kommutatív. A csak-akkor feltételű okságot „akkor és csak akkor, ha” típusúnak, vagyis ekvivalenciának nevezve (ennélfogva kommutatívnak minősítve, holott nem az), az alkalmazásban súlyos problémák adódhatnak. Hasonló következményekkel jár az implikáció alkalmazása a „nemcsak-akkor feltételű” összefüggésekre. A példákat (1-2., illetve 7-8.) lásd a Nyolc elemi összefüggésfajta című részben.)

### *Szükségszerű és valószínű összefüggések*

A kvantumelmélet kidolgozói, értelmezői szerint a természeti törvények elvileg statisztikusak (sztochasztikusak, valószínűségi). Mivel a szociológia, a pszichológia, a pedagógia világában az empirikus kutatásokban főleg sztochasztikus modellek használatosak, ezért érdemes a fizikusok ilyen értelmű felismeréseire figyelmet fordítani. Hívjuk segítségül Heisenberg 1955-ben megjelent közérthető tanulmányát. „A mindennapi életben lépten-nyomon statisztikus törvényszerűségekkel van dolgunk, melyek azután gyakorlati cselekvéseinket is irányítják.” Ezt eddig sem tagadta senki. Ezt nem kielégítő tudásunkkal lehet magyarázni. Hasonló a helyzet a statisztikus mechanikával. Ha részletesebb ismereteink, jobb eszközeink lennének, elvileg egyértelmű meghatározottságig juthatnánk.

Ezzel szemben ... „a kvantumelmélet ténylegesen arra kényszerít, hogy a törvényeket statisztikus törvényekként formulázzuk és a determinizmust elvileg elveszük.” „Említsünk egy példát: tudjuk, hogy egy rádiumatom  $\alpha$ -sugarak kibocsátására képes. A

kvantumelmélet meg tudja mondani, hogy mekkora valószínűséggel fogja időegységenként az  $\alpha$ -részecske a magot elhagyni, de nem tudja a pontos időpontot előre megadni, ez elvileg lehetetlen.” A determinizmus elvetését még ugyanazon az oldalon így enyhíti: „a kutatók arra kényszerültek, hogy a tiszta determinizmusról lemondjanak”. Vagyis a szélsőséges oksági determinizmuson kívül létezik determinizmus. A valószínűség általános érvényét pedig így enyhíti: „a természetben lévő törvényszerűségeket statisztikus törvényszerűségekné tekintjük, bár a statisztikus törvényszerűsége is vezethetnek oly megállapításokra, melyeknek valószínűségi mértéke oly magas, hogy már a bizonyossággal határos.” (Az idézetek a 40–48. oldalokról valók.)

A totálisan érvényesülő egyértelmű meghatározottság megkérdőjelezése a XX. század egyik legnagyobb kihívása volt. A század legnagyobbjai között (akik a kvantummechanika kiépítéséért a legtöbbet tették) is akadtak olyanok, akik nem tudták elfogadni ezt a változást. „Maga *Planck* is haláláig a kételkedők közé tartozott. *Einstein*, *de Broglie* és *Schrödinger* sosem győzték eléggé hangsúlyozni a kvantummechanika statisztikus interpretációjával kapcsolatos hiányérzetüket, követelték a klasszikus newtoni fizika elképzeléseikhez való visszatérést.” (*Born*, 1954. 293. o.)

Ma már elfogadottnak tekinthető a fent hivatkozott tétel, mely szerint a velejáró, az okozat fennállása, létrejötte szükségszerű (egyértelműen, biztosan jósolható, számítható) vagy valószínű (sztochasztikus, statisztikus). Ha a *bizonyosság*, *szükségszerűség* jele a felkiáltójel (!), a *bizonytalanság*, *valószínűség* pedig a kérdőjel (?), e kétfajta összefüggés az alábbi módon fogalmazható meg a fenti példákkal.

Az élelem nélkül elpusztuló állat példája nemcsak-akkor feltételű és szükségszerű oksági összefüggés. A megbotlás példája pedig nemcsak-akkor feltételű és valószínű következményű okság.

Formalizálva:  $v(?O) \rightarrow m(!K)$ .

Formalizálva:  $v(?O) \rightarrow m(?K)$ .

A kör sugara és a kerülete közötti összefüggés csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás. Ha az együttjárás feltétele is és a velejárója is bizonyosság (!), illetve mindkettő bizonytalan (?), akkor fölcserélésük nem változtatja meg az összefüggés fajtáját.

Formalizálva:  $v(!F_s) \leftrightarrow m(!V_k)$ .

Fölcserélve:  $v(!F_k) \leftrightarrow m(!V_s)$ .

Ha viszont csak a feltétel vagy csak a velejáró bizonytalan (?), akkor a fölcserélés eredményeként másfajta összefüggést kapunk. A főnév valahányszor többes számú, mindannyiszor  $k$ -ra végződik, de nemcsak akkor. Ez nemcsak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás.

Formalizálva:  $v(?F_t) \leftrightarrow m(!V_k)$ .

Fölcserélve:  $v(!F_k) \leftrightarrow m(?V_t)$ .

Mivel az együttjárás feltétele és a velejárója fölcserélhető, ezt kapjuk: valahányszor a főnév  $k$ -ra végződik, mindannyiszor többes számú. A  $k$ -ra végződő főnév:  $F_k$ , a többes számú:  $V_t$ . Tudjuk, hogy nem minden  $k$ -ra végződő főnév többes számú. Ezért a „felcserél” összefüggés csak-akkor feltételű és valószínű velejárójú együttjárás.

Ezek a példák azt szemléltetik, hogy az összefüggés (a feltétel) ismeretében megjósolhatjuk a velejáró fennállását, előállását. A jóslás a jövőre vonatkozik: a jelenlegi tudá-

sunkhoz képest a jövőbeli tudást adja bizonyossággal vagy meghatározott valószínűséggel (feltéve, ha ismerjük, hogy a szóban forgó összefüggés mekkora valószínűséggel működik).

Ha az összefüggés csak-akkor feltételű, akkor az összefüggés ismerete alapján egyértelmű, biztos magyarázatot adhatunk arra, hogy mi volt a feltétel, az ok. A  $k=2\pi r$  összefüggés ismeretében a terület nagyságából egyértelműen visszakövetkeztethetünk a sugár méretére.

Ha az összefüggés nemcsak-akkor feltételű, abban az esetben a magyarázat meghatározott valószínűséggel lehetséges. Például az elpusztult állat esetében nem tudhatjuk biztosan, hogy mi volt az elhullás oka. Ismerve az elhullás okainak gyakorisági eloszlását, valószínű magyarázatot kaphatunk a pusztulásra.

#### *Nyolc elemi összefüggésfajta*

A fentieket összefoglalva: A feltételt tekintve az összefüggések vagy 1) csak-akkor feltételűek, vagy 2) nemcsak-akkor feltételűek. A velejáró (a következmény) fennállása, előállása szempontjából az összefüggés vagy 3) szükségszerű, vagy 4) valószínű. Végül a feltétel és a velejáró közötti kapcsolat vagy 5) okság, vagy 6) együttjárás. Ha továbbra is elfogadjuk az okság, a szükségszerűség és a kétféle feltétel létét, valamint ha figyelembe vesszük a XX. században bekövetkezett változást, mely szerint az okság az összefüggések speciális esete, a szükségszerűség pedig a valószínűség speciális esete, akkor strukturális szempontból az összefüggéseknek a fent elemzett és összefoglalásul felsorolt hat fajtája (alapesete) létezik.

Csakhogy minden összefüggés a feltétel, a velejáró és a közöttük lévő kapcsolat egyége. Más szóval minden összefüggést e három összetevő két-két változatának egyike határoz meg. Ennek következtében *strukturális szempontból az összefüggések alapeseteinek, fajtáinak lehetséges száma:  $2^3=8$ .*

Ennek a tanulmánynak nem feladata az összetett összefüggések és az összefüggésláncok bonyolult strukturáinak vizsgálata. A szakirodalom a szélsőséges oksági determinizmus [ez a nyolc lehetséges összefüggésfajta egyike:  $v(!O) \rightarrow m(!K)$ ] egyetemes érvényének, sőt létének elvetése óta a szétvert rendszer körül forgolódik. Máig elfogadottá vált az együttjárás és a valószínűség, de ezekkel nem épültek föl az alapstrukturának megfelelő, a szélsőséges oksági determinizmusban már ősidőktől impliciten meglévő hármas egységű összefüggésfajták.

Az eddigi példákat használva és kiegészítve, a nyolc összefüggésfajta a következő:

- 1)  $v(!O) \rightarrow m(!K)$ . *Csak-akkor feltételű és szükségszerű következményű okság.*  
Példa: Valahányszor megszűnik az alátámasztás, a felfüggesztés, a test mindannyiszor leesik, de csak akkor.
- 2)  $v(!O) \rightarrow m(?K)$ . *Csak-akkor feltételű és valószínű következményű okság.*  
Példa: Valahányszor felkapcsoljuk a villanyt (zárjuk az áramkört), az égő mindannyiszor valószínűleg világít, de csak akkor. (Ha nem égett ki stb.)
- 3)  $v(?O) \rightarrow m(!K)$ . *Nemcsak-akkor feltételű és szükségszerű következményű okság.*  
Példa: Valahányszor előfordul, hogy valamely állat meghatározott ideig nem jut táplálékhoz, mindannyiszor elpusztul, de nemcsak akkor.

- 4)  $v(?O) \rightarrow m(?K)$ . *Nemcsak-akkor feltételű és valószínű következményű okság.*  
Példa: Valahányszor megbotlunk, mindannyiszor valószínűleg elesünk, de nemcsak akkor.
- 5)  $v(!F) \leftrightarrow m(!V)$ . *Csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás.*  
Példa: Valahányszor adott a kör sugara, mindannyiszor adott a kerülete is  $2\pi$  szerint, de csak akkor.
- 6)  $v(!F) \leftrightarrow m(?V)$ . *Csak-akkor feltételű és valószínű velejárójú együttjárás:*  
Példa: Valahányszor  $k$  van a főnév végén, a főnév mindannyiszor valószínűleg többes számú, de csak akkor.
- 7)  $v(?F) \leftrightarrow m(!V)$ . *Nemcsak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás.*  
Példa: Valahányszor többes számú a főnév, mindannyiszor  $k$ -ra végződik, de nemcsak akkor.
- 8)  $v(?F) \leftrightarrow m(?V)$ . *Nemcsak-akkor feltételű és valószínű velejárójú együttjárás.*  
Példa: Valahányszor elvetjük a magot, mindannyiszor valószínűleg kicsirázik, de nemcsak akkor.

Ezek az összefüggésfajták képezték a továbbiakban ismertetendő empirikus kutatás alapját. A kutatás csak az elemi összefüggésekkel foglalkozott. Az elemi összefüggés fenti definíciója, mely szerint az csak egyetlen feltételt és egyetlen velejárót tartalmaz, azzal egészítendő ki, hogy a „nemcsak-akkor” feltétel értelemszerűen egynél több szóba jöhető feltételt jelent. Az elemi összefüggés valamely aktuálisan érvényesülő feltétellel (feltételekkel) működik. Ám ha csak a velejárót, a következményt ismerjük, a szóba jöhető feltételek figyelembevétele nélkül a keresett magyarázat (feltétel, ok) megtalálása kérdéses.

## Összefüggés-megismerés

Eddig az összefüggésről mint ontológiai (lételméleti) témáról volt szó. Most az összefüggést episztemológiai (megismerésméleti) szempontból vizsgálom, más szóval: az összefüggés-megismerés lesz a téma. Pedagógiai szempontból nem a megismerhetőség filozófiai problémája fontos, hanem a megismerés tudásbeli feltételei: a szükséges képességek, készségek, rutinok, előismeretek, továbbá a megismerés, az elsajátítás szintjei. Az eddigi pszichológiai, pedagógiai kutatások csaknem kizárólag az összefüggés-felismeréssel foglalkoztak, ezen belül is főleg az oksági összefüggések felismerésével. Az összefüggés-felismerés empirikus kutatása túlnyomóan az induktív gondolkodásnak, szabályindukciónak nevezett témakörben folyt és folyik. Ezért nem mellőzhető annak vizsgálata, hogy az induktív gondolkodásnak, a szabályindukciónak mi a szerepe az összefüggés-megismerésben.

Az előző fejezetben megnyilvánuló többszemponútú integrációt itt is alkalmazom. Abból indulok ki, hogy az összefüggés-megismerés nem pusztán felismerés, hanem különböző szinteken működő folyamat. Ebből a szempontból az összefüggés-észlelés (a perceptuális szint), az összefüggés-felismerés (fogalmi szint), a szabályalkotás (alkotó szint), az összefüggés-megértés (értelmező szint) egységbe foglalására törekszem, hogy

nyilvánvaló legyen: az összefüggés-megértés milyen rendszerbe, hálózatba tartozik. Továbbá a fent hivatkozott legújabb könyvem (*Nagy, 2000a*): A kognitív képességek rendszere és fejlődése című fejezetében ismertetett rendszer tagjaként értelmezem az összefüggés-megértést. E szerint az *összefüggés-megértés a tudásszerző képesség egyik komplex kognitív készsége*. A tudásszerző képesség négy kognitív képesség egyike (a többi három: gondolkodás, kommunikáció, tanulás). Ezek egymást sajátosan átfedő rendszerek. Ezért a tudásszerző képesség és annak komplex készsége, az összefüggés-megértés működhet kommunikációval is, és egyidejűleg gondolkodás is, ugyanakkor tanulás is bekövetkezhet, amennyiben a megszerzett tudás a háttérmemóriában tárolódik. (A kifejtést lásd az *Összefüggés-megértés és -alkalmazás* című alfejezetben.)

### Összefüggés-észlelés (percepció)

Az oksági gondolkodás perceptuális alapjai címen a téma friss feldolgozása segíti a perceptuális szint ismertetését (*Csibra, Gergely és Nádasdy, 2000*). Az évezredes filozófiai gondolkodás egyik alaptémája az okság, az oksági gondolkodás eredete. Mivel ez a kérdés az egyén, a tanuló esetében arra vonatkozik, hogy az oksági gondolkodás hogyan alakul ki, azt hogyan sajátítjuk el, ezért pszichológiai, pedagógiai szempontból is kiemelkedő jelentőségű. A probléma pszichológiai kutatása a XX. század első felében kezdődött (*Piaget, 1930*), de csak a hetvenes évek végén kezdett kibontakozni. Az első fejezet értelmében az eredet témája nemcsak az oksági összefüggésre, hanem valamilyeni összefüggésfajtára vonatkoztatva fontos. Ha ebből indulunk ki, akkor a szerzőhármastól is ismertetett három alapvető irányzat nem egymással szemben álló elmélet, hanem különböző szempontú hozzájárulások a probléma megoldásához.

Az ember százánál több egységfelismerő, egységkonstruáló mechanizmussal születik (ilyen például az emberi arcot vagy a bűzt felismerő mechanizmus). Ezek az öröklött mechanizmusok tanuló, konstruáló rendszerek. A csecsemő édesanyja arcának sajátsgaival konkretizálja az öröklött sémát, majd a változásoknak megfelelően folyamatosan alakítja, és a legtartósabb sajátosságok minimumára folyamatosan optimalizálja azt. Ezt az úgynevezett PDP-modell szerint egy másodpercnél rövidebb (de legfőljebb egy másodperc körüli) idő alatt működő rendszert egységfelismerő, egységkonstruáló rutinnak nevezem (attól függően, hogy a felismerő vagy a konstruáló működését emelem ki, illetve együtt, röviden: *egységrutinnak*). Ugyanígy működnek a tanult képzetek is: egységfelismerő és egységkonstruáló rutinok.

Öröklötten létezik a viszonyfelismerő, viszonykonstruáló mechanizmusunk, röviden: *viszonyító rutinunk* is. Ha például két gólyát látok, mindkettő ugyanakkor a rutinnak megfelelő neurális hálózatot aktiválja. Ezt a hasonlóság érzete jelzi. Ha egy gólyát és egy békát észlelek, ezek két rutint aktiválnak, ennek megfelelően különbségérzet keletkezik. A viszonyító rutin sokféle viszonyra konkretizálódik. Minden nyelvben kétszázánál több viszonyt jelölő szó létezik (térbeli: alatt, alá stb.; időbeli, méretbeli, mennyiségi, stb.) A viszonyító rutinok az egységfelismerő, -konstruáló rutinokkal működnek. (A kognitív rutinokról lásd *Nagy, 2000a. 80–94. o.*)

A viszonyító rutin különleges esete az összefüggési viszony. Ha két észlelhető egység (sajátság, esemény) ismételtén együtt vagy egymást követően fordul elő, akkor a két

képzet sajátos viszonyfelismerő rutinként működik. „Valahányszor megbotlunk, mindannyiszor valószínűleg elesünk, de nemcsak akkor” (nemcsak-akkor feltételű és valószínű következményű okság). A megbotlás képzete és az elesés képzete oly módon kapcsolódik össze, hogy a két képzet tartós egységgé épül, de a két egység egymást követő viszonya is önállóságát megőrizve rögzül. *Az egység-rutinok és a viszonyító rutin egyesülésével jön létre a perceptuális összefüggés-felismerő, -konstruáló rutin, röviden: az összefüggés-rutin.* Ennek a rutinnak köszönhető a perceptuális előrelátás (jóslás, predikció). Ha látjuk a megbotlást, ennek képzete a másodperc tört része alatt aktiválja a vele egyesült elesés képzetét. És mivel ez az elesés bekövetkezése előtt megvalósul, előre látjuk, hogy mi következhet. Ez az empirista hagyomány, ami *Hume*-ig (1740) vezethető vissza. A PDP-modell segítségével általam levezetett eredetmagyarázat azonban a szokásosnál (lásd a fent hivatkozott szerzőhármass ismertetőjét) egyszerűbb és valamennyi összefüggésfajtára érvényes.

A konstruktivista hagyomány (*Piaget*, 1930) a változást eredményező emberi beavatkozásból vezeti le a perceptuális szintű oksági összefüggés-megismerés eredetét. Az empirikus kutatások szerint a cselekvő beavatkozás és annak következménye közötti oksági összefüggés nagyobb szerepet játszik az összefüggés-megismerés fejlődésében, mint a külvilág összefüggései. Az eredet levezetése azonban ugyanazt eredményezi: a cselekvő beavatkozás és a következmény képzeteinek összefüggés-rutinná egyesülése.

A nativista hagyomány szerint az oksági összefüggés velünk született mechanizmusokban gyökeredzik. *Michotte* (1963) „elmélete szerint az oksági élmény háttérben az a perceptuális konfliktus áll, hogy egy ilyen eseménysorban (egy biliárdgolyó meglöki a másikat) két világosan elkülönülő tárgy, de csak egy mozgás szerepel, mivel a 'jó folytatás' Gestalt-elve a két tárgy mozgását egyesíti. E perceptuális konfliktus feloldásaként látjuk azt, hogy az egyik tárgy mozgása mintegy 'átterjed' a másikra, és ez maga szolgáltatja az okság közvetlen észlelésének alapját. *Michotte* szerint azok a perceptuális alapelvek, amelyek (többek között) az oksági élményt is megalapozzák, nem a tapasztalatból erednek, hanem velünk születtek, és így valószínűleg a csecsemők is rendelkeznek velük.” (*Csibra, Gergely és Nádasdy*, 2000. 57–58. o.) A későbbi empirikus kutatások megerősítették ezt az elméletet.

Ez az elmélet megegyezik az eredet iménti levezetésével. Azzal a különbséggel, hogy nem perceptuális alapelvekről van szó, hanem az egység-rutinról és a viszonyító rutinról, amelyek bizonyítottan öröklöttek. Ezek „Gestalt-elv szerinti konfliktusos egyesülése”, a perceptuális összefüggés-rutin létrejöttének lehetősége öröklött diszpozíció, a tényleges kialakulása a születés után következik be a tartalmi tapasztalatoknak köszönhetően. A fogalmi szintű összefüggés-megismerés, az összefüggés-fogalom, azon belül az okság-fogalom megszületése levezethető a perceptuális összefüggés-rutinból. Lássunk hozzá!

### **Összefüggés-felfedezés (indukció)**

Az induktív gondolkodásnak nevezett kognitív készség tulajdonképpen az összefüggések működésének explicit megismerését szolgálja. Az összefüggés-észlelés az összefüggés-rutin spontán létrejöttét (elsajátítását) és implicit működtetését, gyakorlati alkalmazását teszi lehetővé. Ennek nem feltétele, hogy magáról a szóban forgó összefüggés-

ról és az összefüggésrutinról, valamint általában az összefüggésről, az összefüggés-megismerésről explicit ismereteink legyenek.

Az explicit összefüggés-megismerés négy szintjét célszerű megkülönböztetni: az explicit perceptuális és a tapasztalati fogalmi szintet. Ezek képezik a jelen alfejezet témáját, amire vonatkozó empirikus kutatási eredmények főleg az induktív gondolkodásnak nevezett témakörben találhatók. Az értelmező és az alkotó szintről a következő alfejezetek szólnak.

Az indukción a filozófia ősi témája, az induktív gondolkodás kutatása pedig az utóbbi évtizedekben a pszichológia intenzíven művelt területe. Az induktív gondolkodás a jelen tanulmány szempontjából csak annyiban érdekes, hogy az összefüggés-megértéshez való viszonya, az összefüggés-megismerésben játszott szerepe világos legyen. Néhány friss műre hivatkozva fogok e két kérdésre válaszolni, amelyekben egyébként igen alapos szakirodalmi feldolgozást is talál az olvasó. Időrendben: *Csapó* (1994), *Bán* (1998), *Csapó* (1998), *Klauer* (1999), *De Koning* és *Hamers* (1999).

A szakirodalomból nem derül ki egyértelműen, hogy tulajdonképpen mi és mire való az induktív gondolkodás, szinte minden kognitív aktivitásra kiterjeszkednek a különböző szerzők értelmezései. Az induktív gondolkodás funkcióját tekintve pedagógiai szempontból a *Klauer* által is képviselt álláspontot (1999. 133. o.) célszerű elfogadni. Eszerint az induktív gondolkodás a szabályszerűségnek (regularity, amit a magyar szakirodalom szabályosságként is nevez), valamint az általánosnak a felfedezéséhez (discovery) vezet. Előrebocsátom, hogy az általános is szabályszerűség (később ezt példák is szemléltetik). Ezért a szabályszerűség fogalma az általánost is magában foglalja. A szabályszerűség ontológiai kategória, tulajdonképpen a meghatározottság (determináció) szinonimájának tekinthető. Korábban már jeleztem, hogy ezek helyett miért használom az összefüggés megnevezést. E gondolatmenet értelmében (egyenlőre eltekintve attól, hogy mi az indukción) *az induktív gondolkodás funkciója az összefüggések felfedezése*.

*Csapó* azokkal ért egyet, akik „az induktív gondolkodást ... a megismerés egyik alapvető módjaként, az új tudás megszerzésének eszközeként írják le” (1994. 251. o.). Az összefüggés-felfedezés is tudásszerzés, vagyis lényegében ugyanarról van szó. Az összefüggés-felfedezés annyiban pontosabb, hogy megmondja: minek a felfedezéséről van szó. A tudásszerzés átfogóbb kategória. Az „induktív gondolkodás” kifejezéssel az is probléma, hogy a gondolkodás is szétfolyó fogalom, mindenféle kognitív aktivitásra kiterjeszkedik. Ha a gondolkodást meglévő információkból új információt létrehozó képesség működésének tekintjük, akkor az összefüggés-felfedezés olyan gondolkodás, amely információ-felvételt, -feltárást is feltételez. Ez a tudásszerző képesség. *Az összefüggés-felfedezés a tudásszerző képesség komplex kognitív készsége*. (A gondolkodási, a tudásszerző képességről lásd *Nagy*, 2000a. 8. fejezet.)

Az induktív gondolkodás tárgyát, tartalmát, feladattípusait tekintve különböző listák találhatók. *Klauer* koherens rendszert alkotott, amelynek az alrendszeri: generalizálás, diszkriminálás, osztályozás, összefüggés-felismerés, összefüggések megkülönböztetése, rendszerkonstruálás (ontológiai megfelelői: hasonlóságok, különbözőségek, halmazrendszerek, összefüggések, rendszerek). A különböző szerzők eltérő szóhasználattal ugyan, de hasonló összetevőkkel foglalkoznak. Van, aki az analógiákat, a sorozatok kiegészítését, az osztályozást veszi számba, mások ezenkívül a mátrixok alkotását is, ismét mások

kategóriák alkotásáról, fogalmak formálásáról, generalizálásáról, specializálásról, analógiáról értekeznek.

A kutatók általában nem tesznek különbséget a valószínűségi (statisztikus, korrelatív) és a szükségszerűségi (egyértelmű, kivételt nem ismerő, biztos) szabályszerűségek között. *Csapó* így fogalmaz: „A tágabb értelemben vett indukció fogalmába beletartoznak a valószínűségi, statisztikai jellegű következtetések is.” Ám saját kutatásaira hivatkozva a következő álláspontra jutott: „... a gondolkodás tekintetében az indukció és a korrelativitás teljesen szétválék és különböző módon fejlődik” (1998. 252. o.). *Bán* (1998) már e megállapításnak és a szokásos megközelítésnek megfelelően az induktív gondolkodástól elhatárolódva korrelatív (valószínűségi) gondolkodásról értekezik, oksági és együttjárási változatainak fejlődését kutatja.

Ha a XX. század fejleményeinek megfelelően az oksági és az együttjárási, a szükségszerűségi és a valószínűségi összefüggéseket, továbbá a csak-akkor és a nemcsak-akkor feltételű összefüggéseket, valamint a mindebből adódó nyolcfajta összefüggést mint ontológiai ténytet tekintve vesszük, akkor a következő kiindulás adódik. Először is: az induktív gondolkodás kutatói által számba vett, vizsgált változatok túlnyomó többsége a nyolcfajta összefüggés valamelyikéhez, az elemi, egyszerű és összetett változataihoz tartozik (ez később a példák alapján indoklás nélkül is nyilvánvaló lesz). Ha vannak olyan változatok, amelyek felfedezése nem sorolható a nyolcfajta összefüggés valamelyike alá, kérdéses, hogy azok valóban indukcióval működnek-e. Másodszor: az összefüggés per definitionem meghatározottság (szabályszerűség), ennél fogva a nyolcfajta összefüggés mindegyikének felfedezése, feltárása szabályfelfedezés. Ha az induktív gondolkodás csak az összefüggés-felfedezést szolgálja, akkor ez a két kifejezés szinonimának lenne tekinthető. Az induktív gondolkodás tisztázatlan alapfogalmai és a különböző kutatók eltérő, szétfolyó tartalmi körülhatárolásai miatt az „*összefüggés-felfedezés*” kifejezést használom az összefüggés-megismerés egyik explicit szintjének megnevezésére. Azt nem vizsgálom, hogy ez indukció-e vagy sem. Az összefüggés-felfedezés bonyolult tudásszerző folyamat, amelynek a kutatását előnyös lenne kiszabadítani az indukció fogalmi hálójából.

A kutatók által használt feladatok többsége (lásd például *De Koning és Hamer*, 1999. 2. és 3. ábra) képek segítségével működtetendő összefüggés-felfedezés. Ez az explicit perceptuális szintű összefüggés-felfedezés. A feladatok másik csoportja számokkal, szavakkal működik. A számokat és a szavakat mint fogalmakat ismerni kell ahhoz, hogy az összefüggés felfedezése szóba jöhessen. Az ilyen feladatok az explicit fogalmi szintű összefüggés-felfedezést működtetik. Mindezek a feladatok meglehetősen műviek. A mindennapi életben és a kutatásban ilyenek nemigen léteznek. Az explicit perceptuális szintű összefüggés-felfedezés a mindennapi életben, a tananyagokban előforduló összefüggések aktuális megnyilvánulási sorozatainak észlelő megfigyelésével, a fogalmi szintű pedig a megfigyelésre épülő verbális eseteleírások alapján valósulhat meg.

### **Szabályalkotás**

A szabályalkotás a felfedezett összefüggés grafikus, verbális, illetve formalizált megfogalmazása: a szabály rajzba, szövegbe, formulába foglalása. A szabályalkotás első te-



kintetre nem különös teljesítmény: a felfedezett tudás pusztá megfogalmazása. Talán ez a magyarázata annak, hogy nem találtam szakirodalmat, amely a szabályalkotás kognitív készségével foglalkozik. Ezért csak a magam próbálkozásait tudom idézni.

A nyolcvanas évek közepén különböző bonyolultságú, a mindennapi életben működő összefüggések verbális eseteleírásaival kísérleteztünk. A leírás alapján kellett a szabályt megfogalmazni. A kismintás kipróbálások azt mutatták, hogy a nyolcadikos tanulók túlnyomó többsége nem volt képes hibátlanul megalkotni az eseteleírás alapján a legegyszerűbb és a legnyilvánvalóbb szabályokat sem. Ennek ellenére a legegyszerűbbek közül néhány feladattal elvégeztük a reprezentatív felmérést a nyolcadikosok körében. Lássuk az egyik feladatot, a diótörés szabályát (Nagy, 1987. 84. o.).

„Sári diót tör. Az alábbiakat figyelhetjük meg. 1. dió:→feltöri→eldobja. 2. dió:→feltöri→megtisztítja→tálba teszi. 3. és további diók. Az 1. és a 2. diók esete ismétlődik attól függően, hogy férges-e vagy nem. E megfigyelések alapján folytatnod kell a diótörést!”  
 Mit kell tenni a dió feltörése után? *Fel kell ismerni, férges-e.*  
 Mi a következő lépés? *Eldobás vagy megtisztítás.*  
 Foglald szabályba, hogyan töri Sári a diót! *Feltöri a diót, majd megvizsgálja, férges-e vagy nem. Ha férges, eldobja, ha nem férges, megtisztítja. Végül a megtisztított diót tálba teszi.*

Az összefüggést explikáló megfogalmazásban:

„1. Valahányszor dió, mindannyiszor feltörés. 2. Valahányszor feltört dió, mindannyiszor férgesség-vizsgálat (döntés). 3. Valahányszor férges, mindannyiszor eldobás. 4. Valahányszor nem férges, mindannyiszor megtisztítás<sub>a</sub> és tálba tevés<sub>b</sub>.”

Ebből a redundáns fogalmazásból egyértelműen kiderül, hogy miről van szó. A diótörés szabálya négy csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás konjunkciója. (Vegyük észre, hogy a dió nem oka a feltörésnek és a többi három feltétel sem ok.) Formalizálva:

$$[v(!F) \leftrightarrow m(!V)]_1 \wedge [v(!F) \leftrightarrow m(!V)]_2 \wedge [v(!F) \leftrightarrow m(!V)]_3 \wedge [v(!F) \leftrightarrow m(!V_a \wedge V_b)]_4$$

A diótörés meglehetősen egyszerű feladat. Implicit perceptuális szinten elsajátítani is könnyű. Az ilyen tanulást utánzásnak szoktuk nevezni. Most már azt is tudjuk, hogy ebben az esetben ez az egymást követő négy összefüggésrutin elsajátítását jelenti. Ennek pedig megismerhettük az öröklésbeli alapjait is. Ha a diótörés folyamatát verbálisan leírjuk, ezt az eseteleírást már nem olyan egyszerű felfogni. Aki látott már feltört diót, annak könnyebb a helyzete. Ám a verbális leírásnak az az óriási előnye, hogy a tartalomtól függetlenül is felfedezhető az összefüggés struktúrája, aminek alapján megalkotható a szabály. Ez azért nehéz kognitív feladat, mert minden részletet pontosan számba kell venni, minden kapcsolatot tisztázni kell. Az ijesztően terjedős fenti formula talán sejteti, hogy mi mindennek kell a fejünkben lejátszódnia ahhoz, hogy teljesen egyértelmű és pontos szabály születhessen.

Lássunk egy másik szabályalkotási példát is, a definiálás készségének működését. A definíció a besorolási (a halmazba sorolási) működést leíró szabály. A definíció alapjául szolgáló dolog sajátosságai vagy minden egyes dologban megvannak, vagy csak egy részükben. A dolgok sajátosságait megnevező jegyek viszonya ennek megfelelően konjunk-

tív, diszjunktív, illetve vegyes. Léteznek tisztán konjunktív, tisztán diszjunktív és vegyes jegystruktúrájú definíciók. A vegyes struktúra négy változata különböztethető meg. A legtöbb definíció 1–4 jegyű. Annak érdekében, hogy a tartalmi tudás ne okozzon validitási problémát, élőlények kitalált nevéhez megadtuk a nemfogalmat és 3–4 jegyet, utalva a közöttük lévő kapcsolatra. A hatféle strukturális lehetőséghez (eltekintve a csak nemfogalmat tartalmazó – „a veréb madár” – csonka és az egyjegyű definícióktól) hat definíció megalkotását kértük. A teszt összesen 28 itemet tartalmazott. Lássuk a hat definíció egyikét (az instrukció értelemszerű, ezért mellőzhető):

RÉB	lepke	(egyeseknek): rágószerve van, (másoknak): szipókája, (de ettől függetlenül lehetnek): éjjeliek vagy nappaliak
A réb <i>olyan éjjeli vagy nappali lepke, amelynek ugyanakkor vagy rágószerve, vagy szipókája van.</i>		

Az összefüggést explikáló megfogalmazás: Egy lepke valahányszor 1) éjjeli vagy 2) nappali, ugyanakkor 3) rágószerve vagy 4) szipókája van, az mindannyiszor réb.

Ez az összefüggés nemcsak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás. Formalizálva:

$$\forall [(F_1 \vee F_2) \wedge (F_3 \vee F_4)] \leftrightarrow m(!V).$$

E definíció megalkotásának átlagos eredménye a 10 évesek körében 31%p, a 14 évesekében 58%p, a 18 éveseké pedig 69%p. A definiálás készségének átlagos fejlettsége az iménti életkori sorrendben: 34, 57 és 68%p. Ez a 28 itemes teszt a művelési képességeket mérő nagyszámú szubteszt és teszt összefüggés-vizsgálatai alapján valamennyi közül a legérzékenyebb, legjobb mérő eszköz, legjobb becslő a kognitív készségek átfogó rendszerének fejlettségét (Nagy, 1987. 138–142. o.). Vagyis a szabályalkotás készsége kritikus jelentőségű az értelem fejlődésében.

Ha a hibavariancia figyelembevételével 90%p-ban határozzuk meg a definícióalkotás optimális működését, akkor a 10 éveseknek mintegy a tizedében, a 14 évesek ötödében, a 18 éveseknek pedig mindössze a negyedében fejlődött optimálisan működővé ez a kognitív készség.

### **Összefüggés-megértés és -alkalmazás**

A mindennapi kommunikációban, különösen pedig az iskolában az elődeink által felfedezett összefüggések kész szabályait kapjuk. E szabályok eredményes alkalmazása kognitív, szociális és tárgyi aktivitásunkban az összefüggések megértésének színvonalától, ez utóbbi pedig az összefüggés-megértés komplex készségének fejlettségétől függ.

*Az összefüggés-megértés a szabályismeret, az összefüggés-ismeret hasznosításával és a megértés készségeivel megvalósuló folyamat és eredmény, amelynek köszönhetően az összefüggés explicit tapasztalati és értelmező szintű alkalmazása lehetővé válik a megértés részletezettségétől és mélységétől, valamint az alkalmazás készségeinek fejlettségétől függő eredményességgel.*

Ennek az alfejezetnek az a feladata, hogy bemutassa az összefüggés-megértés ismereteit és készségeit: a szabálymegismerés ismereteit és készségeit, az összefüggés-megismerés ismereteit és készségeit, a szerkezetfeltárás ismereteit és készségeit, a szabályal-

kalmazás ismereteit és készségeit. Ezeknek az ismereteknek az elsajátításáról, a készségek fejlesztéséről, vagyis az összefüggés-megértés fejlesztéséről példák segítségével az utolsó fejezetben lesz szó.

### *Szabályismeretek és szabálymegismerő készségek*

A szabálynak sokféle *változata* létezik: törvény (általában a csak-akkor feltételű okság szabálya), elv (általában a nemcsak-akkor feltételű okság szabálya), függvény, algoritmus, definíció, cselekvési szabály, jogszabály, norma stb. (általában együttjárás). Továbbá ugyanaz a szabály sokféle formában adható meg. *Absztrakciós szint* (mélység) szerint: képileg (például tervrajz, kapcsolási rajz), verbálisan, formalizálva. A *megfogalmazás* szerint is többféle lehet. Különösen vonatkozik ez a verbális megfogalmazásra. Valamint a szabályban előforduló ismeretek *előismeretei* is a szabály-megértés feltételei. Végül a *módosulás* szerint a tagadó és az állító, a feltételt és a velejáróját felcserélő szabálymódosulatok is a szabályismeret körébe tartoznak. Mindez az összefüggés-megértés fejlesztésének témakörébe sorolható (lásd az utolsó fejezetet, a tagadott módosulatokat lásd a következő fejezetben is). A szabálymegismerésnek ezek az ismeretek az eszközei. A szabálymegismerés folyamata az alábbi kognitív készségeknek köszönhetően válik lehetővé:

*Előismeret-feltáró készség.* A szabály valamilyen ábrákkal, fogalmakkal, szimbólumokkal van megfogalmazva. Ezek tartalmának ismerete nélkül lehetetlen az összefüggés-megértés. Ezt nevezik *előismeretnek* vagy *előfeltétel-ismeretnek* (prior, prerequisite knowledge).

*Absztrakcióváltó készség.* Az észleleti, a verbális és a formalizált szintek közötti átjárás készsége.

*Szabályátfogalmazó készség.* A szabály különböző formájú megfogalmazásának készsége.

*Szabálytagadó készség.* A szabály tagadó megfogalmazásainak készsége. Az elemi összefüggésekre vonatkoztatva állítással/tagadással négyféle módosulat lehetséges. A feltétel is és a velejárója is állító. A feltétel állító, a velejárója tagadó. A feltétel tagadó, a velejáró állító, valamint mindkettő tagadó formájú.

*Felcserélő készség.* A feltétel és a velejáró felcserélésének készsége. A feltétel és a velejárójának felcserélése együttjárás esetén lehetséges, mivel az ilyen összefüggések kommutatívak. A csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárások érvényessége és struktúrája (fajtája) a felcserélés után is változatlan marad. A nemcsak-akkor feltételű, illetve a valószínű velejárójú együttjárás felcseréléssel kapott módosulata érvényes marad, de az összefüggés más fajtájúvá alakul. Az oksági összefüggések nem kommutatívak, ezért a feltétel és a velejáró felcserélése érvénytelenné, illetve az eredetihez viszonyítva más összefüggés szabályává válik. A felcserélt összefüggésekre is érvényes az állító/tagadó módosulatok lehetősége.

### *Összefüggés-ismeretek és összefüggés-megismerő készségek*

Az összefüggés-ismeret valamely összefüggés leképezője. Az összefüggés-ismeret feltárása, feltérképezése jó esetben az összefüggés megismerését is eredményezi. Sajnos

az összefüggés-ismeretek szokásos megfogalmazásai gyakran hiányosak, pontatlanok, tévesek, pongyolák. A tankönyvek ilyen értelemben tele vannak hibás szabályokkal (törvényekkel, definíciókkal), ami a szakember számára nem okoz megértési problémát, a tanulónak annál inkább.

Az egyik hibafajta, hogy a szabályból nem derül ki egyértelműen: mi az *összefüggés tárgya*: mi az a *dolog*, melyek azok a dolgok, amelyekre az összefüggés vonatkozik, valamint melyek a szóban forgó dolgok azon *sajátságai* (tulajdonságai, összetevői, működései, viselkedései), amelyek az összefüggésben szerepet játszanak.

A kör kerületével kapcsolatos példa esetén *egy dolog* sajátságai közötti összefüggésről van szó. Két vagy több dolog esetén is e dolgok sajátságai működtetik a közöttük lévő összefüggést. Ezért érthető, hogy léteznek filozófiai nézetek, melyek szerint az összefüggések sajátságok közötti kapcsolatok, ezért a sajátsággal rendelkező dolgoktól el lehet tekinteni. Ez nyilvánvalóan szükséges absztrakció. Pedagógiai szempontból azonban az összefüggésekben szereplő dolgok mellőzése az üres verbalizmus, formalizmus és a hiedelmek melegágya. Ezért az összefüggés-megértés fontos feltétele, hogy egyértelműen megnevezett legyen a dolog, és ismert legyen, hogy ez a dolog reális, hipotetikus vagy fiktív.

A sajátságokat tekintve a működőképes szabályok esetén számbavételük általában egyértelmű, bár nem biztos, hogy más, esetleg kevesebb sajátság felhasználásával nem kaphatnánk-e egyszerűbb, használhatóbb, hatékonyabb szabályt. Ez az összefüggés-felfedezés témakörébe tartozó feladat, de pedagógiai szempontból is fontos, hiszen minél egyszerűbb a szabály, annál könnyebb a megértés és az elsajátítás. Erre az optimalizálásra esetenként a pedagógiai szakértőnek, a tudástechnológusnak, a tankönyvíróknak is lehetősége van (főleg a definíciók, a cselekvési szabályok világában). Végül a sajátságok is lehetnek reálisak, hipotetikusak vagy fiktívek. A jó megértés érdekében ezt is meg kell tudni. Az összefüggés-megismerés a következő kognitív készségeknek köszönhetően valósul meg:

*Összefüggés-megfigyelő készség.* E készség segítségével azt tárjuk fel, hogy mi az összefüggés tárgya. Mi az a dolog (dolgok) és annak, azoknak mely sajátságai vesznek részt az összefüggés működésében. Továbbá tisztázzuk, hogy mely sajátság(ok) képezi(k) a feltételt és mely(ek) a velejárót.

*Realitásvizsgáló készség.* Ennek köszönhető, hogy tisztázni tudjuk: az összefüggés tárgya: a dolog/dolgok és sajátságai(k) realitások, hipotézisek vagy fikciók.

*Esetleíró, szabályfogalmazó készség.* A megfigyeléssel feltárt ismeretek birtokában e készségnek köszönhetően a megfigyelt esetek leírhatók, és az esetek alapján az ismert szabály megfogalmazása is gyakorolható a pedagógus segítségével (ez a szabályalkotás előkészítő fejlesztése).

#### *A szerkezetfeltárás ismeretei és készségei*

Az összefüggés-megértés és -alkalmazás legnagyobb hiányossága, hogy egyáltalán nem vagy csak felületesen ismerjük a szóban forgó *összefüggés struktúráját*: azt, hogy az összefüggés csak-akkor vagy nemcsak-akkor feltételű-e, okság-e vagy együttjárás és szükségszerű-e vagy valószínű. Nem tudjuk, hogy a nyolcfajta összefüggés melyikéről

van szó. Ezeket az ismereteket a tanulmány első fejezete tartalmazza. Az összefüggések szokásos szabályaiban az összefüggés struktúrájára, fajtájára vonatkozó ismeretek explicit módon csak elvétve és hiányosan jelennek meg. Az első fejezet példáin rendszeresen bemutattam a struktúrát, az összefüggésfajtát explikáló verbális és formalizált kifejezési módot. A struktúra megismerését az alábbi kognitív készségek segítik:

*Komplexitás-vizsgáló készség.* Ennek segítségével tudhatjuk meg, hogy a szóban forgó összefüggés elemi, egyszerű vagy összetett-e (ezek jellemzését lásd az előző fejezetben). E készségnek köszönhetően lehetővé válik a több feltételt, illetve következményt tartalmazó összetevők és viszonyaik tisztázása. (A komplex összefüggések, a hierarchikus összefüggésláncok megismerése, megértése különösen nehéz feladat, de ennek a tanulmánynak ez nem tárgya. A téma pedagógiai célú kutatása a jövő feladata.)

*Összefüggés-azonosító készség.* E készség segítségével tisztázható, hogy az összefüggés csak-akkor vagy nemcsak-akkor feltételű-e, a velejáró szükségszerű vagy valószínű-e, a feltétel és a velejáró közötti viszony okság vagy együttjárás-e. Mindezek birtokában tisztázható, hogy a szóban forgó összefüggés a nyolcfajta összefüggés közül melyik fajtájú.

#### *Az összefüggés-alkalmazás ismeretei és készségei*

Létezésünk, túlélésünk kiinduló feltétele az összefüggés-alkalmazás. Amikor például a megbotló embert elkapjuk, akkor implicit szintű predikció alapján beavatkozásunkkal megakadályozzuk a megbotlás valószínű velejárójának bekövetkezését. Ez a jósló és beavatkozó alkalmazás a megbotlás és az elesés egymást követő előfordulásairól kialakult (a korábban ismertetett módon egyesült) két képzetnek, az összefüggésrutinnak köszönhető. A megbotlás észlelése felidézi a megfelelő képzetet, ami szinte egyidejűleg aktiválja az elesés képzetét is. Ez adja a predikciót, a *jóslást*, aminek köszönhetően a bekövetkezést ebben az esetben meg is akadályozhatjuk. Mivel ez az összefüggés nemcsak-akkor feltételű és valószínű következményű okság, nem biztos, hogy az elesés bekövetkezik. Példánk esetében elősegíthető, hogy biztosan bekövetkezzen az elesés (az más kérdés, hogy ezt a beavatkozást hogyan minősítjük).

Az elesést észlelve *magyarázatot* kaphatunk arra vonatkozóan, hogy miért esett el az illető. Mivel az összefüggés nemcsak-akkor feltételű, többféle magyarázat (példánk esetében ok) jöhet szóba (például: megbotlás, meglökés, rosszullet). Ismerve a szóba jöhető feltételeket (okokat), létrehozhatjuk, aktiválhatjuk a feltételt, elősegíthetjük érvényesülését. De módunkban állhat a feltételt kiiktatni, érvényesülését megakadályozni, módosítani.

Az alkalmazás szempontjából az összefüggés szabályának megfogalmazása leíró, jósló, magyarázó és előíró módban adott.

- a) *Leíró módban* például kijelentő, feltételes mondattal, a fent használt „valahányszor ... mindannyiszor” fordulattal, formalizált módon szokás az összefüggést megfogalmazni. A leíró mód funkciója az összefüggés leképezése. A leíró módban implicite benne van a jóslás, a magyarázat és az előírás lehetősége is. Mind a négy mód elvileg egymásba konvertálható.

- b) *A predikciós (előrebecslő, jósló) mód* a velejáróra, következményre kérdez rá és válaszol. „...akkor mi várható, mi fog történni?” „Ha az *F* feltétel fennáll vagy előáll, akkor ilyen és ilyen állapot, esemény, változás várható.”
- c) *Magyarázó módban* a feltételre (okra, előzményre, kiinduló állapotra) kérdezzünk rá. „...ha ez a helyzet, az állapot, ha ez történt, következett be, mi annak a magyarázata (feltétele, előzménye, oka)?” „Ennek és ennek az állapotnak, eseménynek, változásnak ez és ez a magyarázata, feltétele, oka, előzménye.
- d) *Az előíró mód* pedig azt mondja meg: mit kell tenni, hogy a *feltétel* fennálljon, előálljon, aktiválódjon, illetve hogy megakadályozzuk a feltétel fennállását, előállítását. Vagy mit kell tenni, hogy a *velejáró*, a következmény fennállását, előállítását megakadályozzuk, illetve elősegítsük.

Az összefüggés alaposabb megértéséhez nagymértékben hozzájárulhat a különböző megfogalmazásokba, leírási módokba történő konvertálás elvégzése. Ennek a gyakorlatnak a feltétele és következménye a *szabálykonvertáló készség* kialakulása.

*Megismerő alkalmazás.* Ha ismerjük az összefüggést akár tapasztalati (implicit), akár értelmező (explicit) szinten, akkor a jóslás és a magyarázat, vagyis az összefüggés megismerő alkalmazása mindig lehetséges. (Vegyük észre, hogy az okság és az együttjárás nem befolyásolja sem a magyarázat, sem a jóslás bizonyosságát vagy bizonytalanságát).

- a) A csak-akkor feltételű és szükségszerű következményű okság, illetve szükségszerű velejárójú együttjárás esetében a jóslás is és a magyarázat is egyértelmű bizonyosság.
- b) A csak-akkor feltételű és valószínű következményű okság, illetve valószínű velejárójú együttjárás biztos magyarázatot, de bizonytalan jóslást tesz lehetővé.
- c) A nemcsak-akkor feltételű és szükségszerű okság, illetve szükségszerű velejárójú együttjárás esetén bizonytalan a magyarázat és biztos a jóslás.
- d) A nemcsak-akkor feltételű és valószínű következményű okság, illetve valószínű velejárójú együttjárás csak bizonytalan magyarázatot és bizonytalan jóslást enged meg.

A megismerő alkalmazás a *jósló* és a *magyarázó készség* fejlettségétől függ.

*Cselekvő alkalmazás.* A magyarázat, illetve a jóslat birtokában lehetséges a cselekvő alkalmazás is. Ez négyfajta beavatkozás lehetőségét kínálja:

- a) a feltétel létrehozását, előállítását, aktiválását, megfelelővé alakítását,
- b) a feltétel létrejöttének, fennállásának megszüntetését, hatástalanítását,
- c) a velejáró fennállásának, létrejöttének elősegítését,
- d) a velejáró fennállásának, létrejöttének megakadályozását.

A cselekvő alkalmazás eredményességének az összefüggés-ismeret és a jósló, magyarázó készség mellett a *cselekvő alkalmazás készsége* is feltétele.

*Összefoglalva:* Az eddigiek alapján belátható, hogy az összefüggések tartalmának ismerete mellett az a tudás is alapvető jelentőségű, amely a szóban forgó összefüggés szerkezetére, fajtájára vonatkozik. Az összefüggés-megértés meghatározó jelentőségű feltétele az összefüggés szerkezetének, fajtájának tisztázása, ami ugyanakkor az eredményes megismerő, valamint a valóságos vagy szimulatív cselekvő alkalmazás feltétele is. A megismerő és a cselekvő alkalmazás sikere attól is függ: tudjuk-e, hogy az alkalmazandó összefüggés melyik fajtához tartozik, és mi jellemzi az alkalmazhatóság szem-

pontjából. *Az összefüggés-megértés és -alkalmazás komplex (funkcionális) kognitív készség, amely a fent számba vett készségek és ismeretek készlete. Az aktuális összefüggés e készlet megfelelő komponenseinek aktiválásával teszi megoldhatóvá az összefüggés-megértés és -alkalmazás feladatát.*

Az iskolai oktatás eddig jóformán csak az összefüggés tartalmi ismereteinek tanításával foglalkozott. A tanított összefüggések szerkezetére, működésére nem fordított gondot. Ezért a következő fejezet az összefüggés-megértés fejlődését a szerkezet, a működés szempontjából vizsgálja. Az mindeddig föl sem merült, hogy az összefüggés-megértés, -alkalmazás készségeit is fejleszteni kellene. Az utolsó fejezet az összefüggés-megértés fejlesztésének feladatait, módszereit ismerteti nem csak a szerkezet szempontjából.

### **Az összefüggés-megértés fejlődése**

Az összefüggés-megértés három tényezőtől függ. A szóban forgó összefüggés tartalmi ismereteinek (a célismereteknek és az előismereteknek) a birtoklásától, elsajátításától. A tartalmi tudás elsajátításáról a szokásos tantárgytestekkel, feladatlapokkal kaphatunk képet. A megértés függ továbbá az összefüggések és az összefüggés-ismeretek természetére vonatkozó ismeretektől, valamint a megértés és alkalmazás készségeinek, vagyis az összefüggés-megértés komplex készségének a fejlettségétől. Az összefüggések és az összefüggés-ismeretek természetére vonatkozó tudással a tanulók nem rendelkeznek. Ezért jelenleg ennek az ismeretkörnek a direkt felmérése értelmetlen vállalkozás lenne. Az empirikus kutatás feladata jelenleg annak feltárása lehet, hogy a mindennapok tapasztalata és az iskolában tanított sok-sok összefüggés milyen mértékben fejleszti az összefüggés-megértés kognitív készségeit. Más szóval: annak felmérése, hogy a spontán fejlődésnek mi az eredménye.

Az összefüggés-felfedezés kognitív készségének fejlődéséről vannak adataink (lásd az előző fejezet megfelelő pontját és az ott hivatkozott szakirodalmat). A szabályalkotás helyzetéről is kapott az olvasó némi képet. E két kognitív készség fejlődésének megismerése és fejlesztésének megoldása továbbra is alapvető feladat. Az elődeink által felfedezett és szabályba foglalt összefüggések megértésének készségeiről viszont egyáltalán nincsenek ismereteink. Az előző fejezet végén 14 ilyen készséget vettem számba. Ezek többségének működtetése nem vagy alig fordul elő az iskolában. Ilyenek a szabálymegismerő készségek (előismeret-feltárás, absztrakció-váltás, szabályátfogalmazás, szabálytagadás, felcserélés). Ilyen továbbá a realitásvizsgálat, a komplexitás-vizsgálat. Az összefüggések tanulása során direkt módon működnek az összefüggés-megfigyelés és az összefüggés-alkalmazás készségei. Végül a legkülönbözőbb tanított összefüggések strukturái indirekt módon kényszerűen hatnak, vagyis az összefüggések tartalmi szempontú tanítása, elsajátítása fejleszti az összefüggés-megértést. Ezt a fejlesztő hatást törekedtem feltárni.

## Teszt és felmérés

A fentieket figyelembe véve első lépésként az összefüggés-azonosító készség, a szabálytagadó és a fölcserélő készség fejlődésének feltárására tettem kísérletet (a két utóbbi készségre is a struktúra-azonosítás szempontjából esett a választás).

E cél érdekében a nyolcfajta struktúrájú összefüggés felismerésének vizsgálatára egy-egy elemi összefüggés szerepel a tesztben. Ezekről kellett eldönteni, hogy csak-akkor vagy nemcsak-akkor feltételű-e, szükségszerű vagy valószínű következményű-e (a „velejáró” megnevezést még nem használhattuk), okság-e vagy együttjárás. Továbbá mind a nyolc összefüggés nyolc-nyolc változatban szerepelt a tesztlapon. A feltétel és a következmény is állító, a feltétel tagadó, a következmény tagadó és mindkettő tagadó változatban. A második négy változatot a feltétel és a következmény fölcserélésével kapott állító, tagadó megfogalmazások adták. Mind a nyolc kijelentésről el kellett dönteni, hogy mindig, soha vagy esetenként áll fenn, áll elő a következmény. Ez a szükségszerűen vagy valószínűen fennálló, előálló következmény köznyelvi terminológiába ágyazott felismerésének készségét hivatott értékelni.

Tekintettel arra, hogy a megértés a tartalmi tudástól és az összefüggések természetére vonatkozó tudástól is függ, ezért olyan egyszerű köznapi példákat választottam és teszteltem, amelyeket ismernek és alkalmaznak a tanulók. A nyolc példa között az „eső”, a „négyzet” és a „mágnes” példája az előmérések alapján nem mindenki számára volt tartalmilag egyértelmű, ezért e példák összefüggéseinek tartalmi ismereteit a felmérés előtt meg kellett tanulni. Továbbá az összefüggésre vonatkozó nyolc fogalmat (feltétel, következmény, csak-akkor, nemcsak-akkor, szükségszerű, valószínű, okság, együttjárás) a tesztben nem szereplő, megadott példákkal fel kellett dolgozni, valamint a pedagógusok felkészítéséhez is rendelkezésre állt egy kétoldalas anyag megfelelő példákkal, amelyeket maguk is megoldottak. Végül a tanulók is kaptak egy rövid próbatesztet, amelyet tanári segítséggel megoldottak. Ez tette tapasztalatilag érthetővé, hogy mit és hogyan kell majd cselekedni a teszt megoldásakor.

Így született meg a nyolc feladatot tartalmazó kétoldalas teszt. Minden feladat 11 elemet (itemet) tartalmazott. Az itemek száma összesen 88. Meg kellett állapítani, hogy a feladatban szereplő összefüggés nemcsak-akkor vagy csak-akkor feltételű-e; szükségszerű vagy valószínű következményű-e; okság-e vagy együttjárás. E három item két-két lehetősége közül az egyiket kellett aláhúzni. A nyolc kijelentésről pedig azt kellett megállapítani, hogy a következmény mindig, soha vagy esetenként áll-e fenn, következik-e be. A három lehetőség közül egyet kellett aláhúzni. Aki elkészült, jelentkezett és beírta a felhasznált percek számát.



Összefüggés-megértés

**ÖSSZEFÜGGÉS-MEGÉRTÉS (1. oldal)**

- a) Előbb a bal oldali két nagybetűs rubrikában kell aláhúzni a mellette lévő összefüggésnek megfelelő szót (a MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT közül egyet választva).
- b) Majd a jobb oldali két rubrikához tartozó összefüggéseket tanulmányozva kell az aláhúzásokat elvégezni.
- c) Végül a **szürke háttérű összefüggés** alapján a NEMCSAK-AKKOR és a CSAK-AKKOR pár egyikét, továbbá a SZÜKSÉGSZERŰ és a VALÓSZÍNŰ pár egyikét, valamint az OKSÁG és az EGYÜTTJÁRÁS pár egyikét kell aláhúzni.
- RELIABILITÁS:  $\alpha = 0,91$   
 A tesztben szereplő adatok a jó megoldást adó tanulók arányát mutatják %-ban.

**ÉVFOLYAMOK**

- 1) *Eléshetünk, ha meglöknék, ha a villamos hirtelen fékez stb. Most a megbotlásról lesz szó. 4. 6. 8. 10.*

Ez így van, így történik: ↓	Ez az össze- függés ↓	NEMCSAK-AKKOR vagy CSAK-AKKOR feltételű?		79	81	82	80
		SZÜKSÉGSZERŰ vagy VALÓSZÍNŰ következményű?		76	80	83	80
		OKSÁG vagy EGYÜTTJÁRÁS?		55	56	60	62
MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT	<b>AKI MEGBOTLIK, ELESIK.</b>	←	93 95 97 97 82 82 82 81	→	Aki <i>nem</i> botlik meg, <i>elesik.</i>		MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT
MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT	Aki <i>megbotlik, nem esik el.</i>	←	93 96 97 98 80 80 79 80	→	Aki <i>nem</i> botlik meg, <i>nem esik el.</i>		MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT

- 2) *A négyzet kerületének kiszámítása: egy oldalának hosszát szorozzuk négygel. Például 2\*4=8.*

Ez így van, így történik: ↓	Ez az össze- függés ↓	NEMCSAK-AKKOR vagy CSAK-AKKOR feltételű?		64	69	74	76
		SZÜKSÉGSZERŰ vagy VALÓSZÍNŰ következményű?		50	56	63	64
		OKSÁG vagy EGYÜTTJÁRÁS?		44	50	54	56
MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT	<b>HA A NÉGYZET OLDALA 2 m, AKKOR A KERÜLETE 8 m.</b>	←	77 82 88 92 70 75 82 86	→	Ha a négyzet <i>oldala nem 2 m, akkor a kerülete 8 m.</i>		MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT
MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT	Ha a négyzet <i>oldala 2 m, akkor a kerülete nem 8 m.</i>	←	73 77 84 88 64 71 78 82	→	Ha a négyzet <i>oldala nem 2 m, akkor a kerülete nem 8 m.</i>		MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT

- 3) *Az eső akkor esik, ha a felhő lehül, és a pára kicsapódik.*

Ez így van, így történik: ↓	Ez az össze- függés ↓	NEMCSAK-AKKOR vagy CSAK-AKKOR feltételű?		55	53	54	46
		SZÜKSÉGSZERŰ vagy VALÓSZÍNŰ következményű?		26	28	28	31
		OKSÁG vagy EGYÜTTJÁRÁS?		40	48	48	46
MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT	<b>HA ESIK AZ ESŐ, FELHŐS AZ ÉG.</b>	←	55 62 62 67 80 87 90 93	→	Ha <i>nem</i> esik az eső, <i>felhős az ég.</i>		MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT
MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT	Ha <i>esik</i> az eső, <i>nem felhős az ég.</i>	←	55 60 61 65 72 78 82 84	→	Ha <i>nem</i> esik az eső, <i>nem felhős az ég.</i>		MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT

- 4) *A tárgy leeshet, ha lelökjük, ha elszakad a zsinór, ami tartja stb. Most a leejtésről lesz szó.*

Ez így van, így történik: ↓	Ez az össze- függés ↓	NEMCSAK-AKKOR vagy CSAK-AKKOR feltételű?		61	60	60	56
		SZÜKSÉGSZERŰ vagy VALÓSZÍNŰ következményű?		24	27	29	31
		OKSÁG vagy EGYÜTTJÁRÁS?		41	38	40	39
MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT	<b>HA LEEJTEM A RADÍRT, LEESIK.</b>	←	70 80 82 84 63 61 60 58	→	Ha <i>nem</i> ejtem le a radírt, <i>leesik.</i>		MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT
MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT	Ha <i>leejtem</i> a radírt, <i>nem esik le.</i>	←	64 73 73 74 55 51 52 50	→	Ha <i>nem</i> ejtem le a radírt, <i>nem esik le.</i>		MINDIG, SOHA, ESETENKÉNT



Helykímélés végett a teszt feladatai mellé beírtam, hogy a 4., 6., 8., 10. évfolyamos tanulók hány százaléka adott helyes választ a feladatelemekre. A fejlettség, a fejlődés elemzésére a következő alfejezetben kerül sor. E helyen a teszt használhatóságának fontosabb jellemzőit ismertetem.

A hat évet felölelő négy évfolyam adatai következetesen, egyöntetűen enyhe javulást mutatnak. A várakozásnak megfelelően az összefüggésfajta felismerésére vonatkozó kérdések egyértelműen nehezebbnek bizonyultak a köznapi tartalmú kijelentések alapján történő felismeréseknél. A következő alfejezetben ismertetett valamennyi eloszlás megfelel a szokásos eredményeknek. Ezek a „szabályosságok” azt jelzik, hogy a teszt megfelelően mér. Vegyük számba a tesztet és a felmérést jellemző fontosabb adatokat.

Valamennyi iskola kapott ajánlatot a felmérésre, és valamennyi tesztet kérő iskola megkapta az előkészítő anyagokat és a kétoldalas tesztet. Összesen 29 508 kitöltött tesztet kaptunk vissza (a négy évfolyam szerinti megoszlás: 9848, 9519, 6977 és 3168). A besoroló változók (iskola, évfolyam és hasonlók) beírása több ezer tanuló esetében hiányos volt. Ezeket a tesztek elhagytuk. Történtek hibák az adatrögzítés során is. Az ilyen tesztek is kihagytuk. Végül (és ez a legfontosabb probléma) nem állt módunkban ellenőrizni, hogy az előkészítés megtörtént-e, és milyen szinten, alaposan. Az előmérések tapasztalatai szerint a hiányzó vagy nem megfelelő előkészítés esetén a tanuló nem tudja, hogy mit és hogyan kell csinálni. Ennek következtében értelmetlen megoldásokat adhat. Ez pedig a mérés megbízhatóságát veszélyezteti. Mivel az előkészítés hiánya, minősége az osztály egészét érinti, ezért valamennyi osztályra kiszámítottuk a mérés megbízhatóságának (reliabilitásának) mutatóját, és a 0,80-nál alacsonyabb értéket adó osztályokat kihagytuk a mintából. Ellenőrzésként számításokat végeztünk a kihagyott és a megmaradt osztályok adataival. Eredményül azt kaptuk, hogy a kihagyott osztályok miatt nem torzulnak a megmaradt osztályok eredményei. Végül is 20 358 teszt maradt (a négy évfolyam létszámai: 6894, 6840, 4680, 1944). Ezek a minták még mindig olyan nagyok, hogy fölmerült: ezekből szokásos méretű mintákat veszünk. A mai gépek kapacitása mellett ez a hatalmas adattömeg is jól és megfelelő idő alatt kezelhető. Ezért a további adatok a húszszernyi tesztből származnak (a részminták minden változata is jóval meghaladja a szükséges elemszámot).

A teszt megbízhatóságának legfontosabb mutatója a reliabilitás értéke: ez  $\alpha=0,91$  (az évfolyamokon külön-külön mért érték 0,906 és 0,915 közötti, vagyis alig változik). Ez azt jelenti, hogy a kapott eredmények elegendően megbízhatóknak minősíthetők.

A teszt tartalmi-logikai szempontból koherens rendszer, tartalmi-strukturális validitása egyértelműen megfelelő. Kérdés, hogy a feladatok példáival kapcsolatos tárgyi ismeretek esetleges hiányosságai mennyire befolyásolták az eredményeket. Becslésem szerint ez nem jelentős zavaró tényező. Mégis szükség lesz kiegészítő kutatásra. Kismintákon külön meg kell mérni a tárgyi tudást és ezt követően kell elvégezni az összefüggés-megértés tesztet a felmérést. Az így nyert adatokból megkapható a tárgyi tudás validitást csökkentő hatása. Az összefüggés-ismeret nyolc alapfogalmának hiányos ismerete ugyan közvetlenül az összefüggés-megértés komplex készségének alapvető összetevője, mégis célszerű külön is vizsgálni e fogalmak ismeretét és a készség működését. Az így kapott ismeretek segíthetik a fejlesztő munka eredményességét. A validitás szempontjából említést érdemel, hogy a fejlesztő kísérletben részt vevő tanulók előmérése során két intelli-

genciateszt adatait is fölvevük (*Raven, Bender*). E tesztek aggregált mutatói és az összefüggés-megértés mutatói közötti korreláció  $r=0,54$ . Ez azt jelzi, hogy az összefüggés-megértés teszttel mért kognitív készség az értelem fejlettségének fontos tényezője.

A lépésenkénti regresszióanalízis azt mutatja, hogy a 88 feladatelemből már 40 elem esetén  $R=0,98$ . Vagyis az analízissel kiválasztott 40 elem gyakorlatilag ugyanazt az eredményt szolgáltatná, mint az eredeti teljes teszt. A 40 feladatelem többsége a 24 összefüggés-azonosító feladatokból és a fölcserélés nélküli tagadással módosított feladatelemekből kerül ki. Am ha a számítással kapott elemekből állítanánk össze a rövidített tesztet, a strukturális-logikai koherencia összeomlana. Ezért azt a megoldást választottam, hogy a fölcserélt 32 feladatelemet hagytam el. Ezek teljesen hasonló módon viselkednek, mint a fölcserélés nélküli 32 feladatelem, csak egy kissé nehezebbek. A teljes teszttel és az 56 feladatot tartalmazó rövidített teszttel kapott eredmények szignifikánsan nem különböznek egymástól (az adatokat és az értelmezést lásd a következő alfejezetben). Mindezeket megfontolva az előző oldalakon csak a rövidített teszt feladatait közlöm.

A tesztek használhatóságát nagymértékben befolyásolja a megírásukhoz szükséges idő. A teljes teszt kitöltésére a négy évfolyamon felhasznált percek átlaga, zárójelben a relatív szórása, a következő:

4. osztály: 24 perc (57%);      6. osztály: 21 perc (47%);  
8. osztály: 20 perc (47%);      10. osztály: 18 perc (58%).

Az átlagok megfelelőek, hiszen a teszt egy fél tanóra alatt megoldható. A szórások viszont igen nagyok. Vagyis a tanulók szélsőségesen különböző időt használtak fel a teszt kitöltésére. Akadtak, akik 10 percnél is rövidebb idő alatt végeztek, néhányan viszont 50-70 percig is dolgoztak. A szélsőségesen nagy szórás is hozzájárult ahhoz, hogy éltem a teszt lerövidítésének lehetőségével, aminek következtében az időszükséglet átlaga várhatóan 15 percre csökken, és a nagyon lassú tanulóknak is elég lesz 35–40 perc.

### A fejlődés mutatói

A 4., a 6., a 8. és a 10. évfolyam végén elvégzett fölmérés adatai sokféle tanulással szolgálnak. Ebben a tanulmányban csak a legfontosabb, legátfogóbb jellemzőket ismertetem. Azokat, amelyek segítik a fejlesztési hipotézisek, a tennivalók megfogalmazását. Az elemzendő, értelmezendő adatokat az 1–3. ábrák szemléltetik.

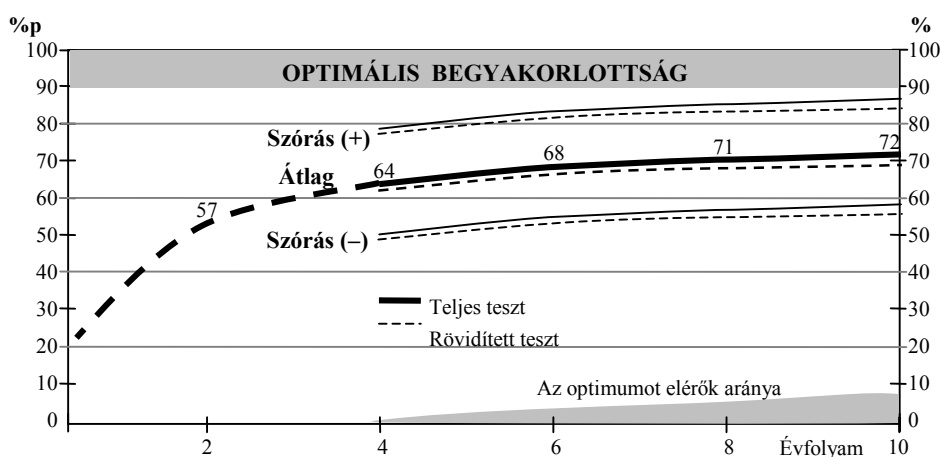
Az előző alfejezetben felvázoltam a teszt rövidítésének lehetőségét, és utaltam arra, hogy majd később bemutatom az adatokat, amelyek szerint a teljes teszt és a rövidített teszt eredményei között jelentéktelenek a különbségek, most ez látható is. Az 1. és a 2. ábra folytonos vonalai a teljes teszt, szaggatott vonalai pedig a rövidített teszt eredményeit szemléltetik. Mint látható, a szaggatott vonalak közvetlenül a teljes teszt folytonos vonalai alatt futnak. A valamivel alacsonyabb eredmények azzal magyarázhatók, hogy a kihagyott 32 feladatelem könnyebb, mint a rövidített változatban bent maradt struktúra-azonosítást kérő feladatelemek. E tények alapján a továbbiakban a teljes változat eredményeit elemezve, a következtetések a rövidített változat eredményeire is érvényesek.

## Összefüggés-megértés

Az 1. ábra legszembeütőbb sajátága, hogy az átlagos fejlettség már a 4. évfolyam végén 64 százalékpont. A 10. évfolyam végéig, 6 esztendő alatt ez az érték mindössze 8 százalékponttal növekszik. Egy évvel korábban mértük fel a fejlesztő kísérletben résztvevő tanulók fejlettségét, hasonló eredményeket kaptunk a tanév elején:

3. évf.: 60%p, 4. évf.: 61%p, 5. évf.: 65%p, 6. évf.: 70%p, 8. évf.: 70%p.

Tekintettel arra, hogy a mérés a tanév elején történt, az ábrán közel egy évvel korábbra kellene az adatokat bejelölni. Az így berajzolandó görbe szinte teljesen megegyezik az országos átlag görbéjével, észlelhetetlen lenne. Ezért kellett az adatokat felsorolni. Az országos felmérés igen nagy mintája és az egy évvel korábbi felmérés szignifikánsan hasonló fejlődési görbéje alapján elfogadhatónak mondható, hogy az ábrán látható fejlődési görbe a valós helyzetet mutatja.



1. ábra

*Az összefüggés-megértés fejlődése*

Ezek szerint a fejlődés mintegy kétharmada az általános iskola felső tagozata, vagyis 9–10 éves kor előtt zajlik le. Ezt követően a 10. évfolyam végéig, 16 éves korig a fejlődés jelentéktelen. Vagyis az iskolai oktatás 6 év alatt alig járul hozzá a kognitív készség fejlődéséhez. Különösen feltűnő, hogy a középiskola 9–10. évfolyamán stagnálás következik be (ezt mutatja a 2. ábra is). A fejlesztő kísérletben résztvevő 2. és 3. osztályos tanulókról is vannak adataink. Ezek alapján tudjuk, hogy már a másodévesek átlaga is 57%p. Vagyis a lassú fejlődést mutató görbe a 2. évfolyamig meghosszabbítható. Az intenzív fejlődés nyolcéves kor előtt zajlik le. Ezt követően a görbe „ellaposodik” és igen lassú fejlődést mutat. Nem ismert, hogy a felsőoktatás hozzájárul-e a fejlődéshez. Az azonban feltételezhető, hogy a felsőoktatásban nem részesülők ezeknek az átlagoknak megfelelő szinten élnek az életüket (az egyéni különbségeket lásd később). Az elmúlt évtizedek során végzett kutatásaink a legkülönbözőbb kognitív készségek túlnyomó többsége esetén a fenti képet mutatják. A felső tagozat előtt a kognitív készségek inten-

zív fejlődése zajlik le, majd a görbe megtörik, és a felső tagozatban, a középiskolában a fejlődés csaknem a stagnálás szintjére lassul. E döbbenetes tények sokaságára régóta keressük a választ. Különböző, többé-kevésbé elfogadható hipotéziseink már vannak, ezek ismertetésére azonban még nem értek meg a feltételek.

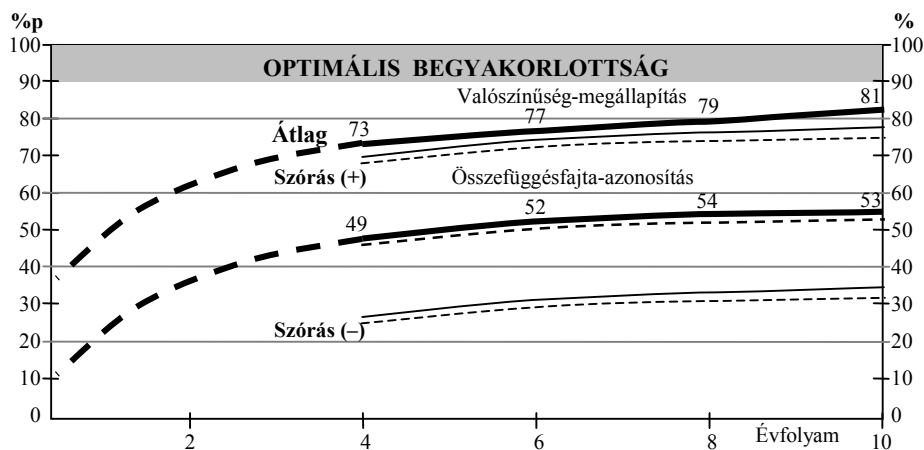
Az ábra szemlélteti a szórást (ami azt fejezi ki, hogy a tanulók mintegy kétharmadának fejlettsége esik a  $\pm$ szórás által kijelölt sávba. A sávon kívül eső 17–17%-nyi tanuló a szórás által jelölnél fejlettebb, illetve fejletlenebb). A relatív szórás (a 4., 6., 8., 10. évfolyam végén: 23%, 21%, 20%, 19%) az igen lassú átlagos fejlődésnek megfelelően lassú csökkenést mutat. Az úgynevezett kritikus kognitív készségek (amilyen az összefüggés-megértés készsége is) optimális elsajátítása, működése akkor következik be, amikor a relatív szórás 10% alá csökken. Az ennek megfelelő átlag 90%p körüli. Ezeknek az adatoknak a birtokában határozható meg az optimális elsajátítás, begyakorlás kritériuma (erről lásd Nagy, 2000b). Tekintettel arra, hogy ilyen adataink jelenleg nem létezhetnek, az optimális elsajátítás kritériuma feltételesen 90%p-ban határozható meg. A kritikus kognitív készségek esetében a tanulók túlnyomó többségének (85–95%) ezt a szintet kellene elérni.

Az 1. ábra azt mutatja, hogy már a 4. osztályosok között minden századik tanuló eljutott az optimális elsajátítás szintjére, vagyis az összefüggés-megértés készségét optimális szinten birtokolja, működteti. Ugyanakkor a 10. évfolyam végén a lassú fejlődés következtében mindössze 6%-nyi tanuló birtokolja, működteti optimálisan ezt az alapvető jelentőségű kritikus kognitív készséget.

A 2. ábra a teszt tartalmilag különböző két összetevőjének fejlettségét külön-külön szemlélteti. A valószínűség-megállapítás, amelyet az összefüggés négy állító-tagadó leírása alapján kellett elvégezni (lásd az előző alfejezetben közölt teszt 32 feladatelemét), már a 4. osztály végén 73%p átlagot ér el. Ez azt jelenti, hogy 5% százalék körüli azoknak a negyedikeseknek az aránya, akik ezt a kognitív készséget már optimális szinten működtetik. De a lassú fejlődés miatt a 10. évfolyam végéig ez az arány csak 15%-ra emelkedik.

A megismerő alkalmazás (a jóslás és a magyarázat), valamint a cselekvő alkalmazás eredményességének alapvető feltétele az összefüggés-azonosító készség fejlettsége. Mint a 2. ábra szemlélteti, ennek a kognitív készségnek az átlagos fejlettsége a 4. évfolyam végén 49%p, a 10. évfolyam végén pedig 53%p. Ennek következtében az optimális elsajátításig eljutók aránya csak tized százalékokban fejezhető ki (ami az ábrán nem szemléltethető). Ennek ellenére figyelemre méltó, hogy az évfolyamonkénti százezernyi tanuló közül a 4. osztályban 300, a 10.-ben pedig 700 ilyen tanuló található. Ennyien értek el legalább 90%p-ot az összefüggésfajták azonosítását kérő 24 feladatelem megoldásával. Ez azért is figyelemre méltó, mert az összefüggésfajták mind a mai napig a tudományok számára is problematikus témák. Ez azt jelenti, hogy a tapasztalatok által fejlődő természetes észjárás szerencsés feltételek esetén spontán módon is kifejleszti ezt a kognitív készséget. (Természetesen csak implicit szinten. Ugyanis ezek a tanulók sem tudnak semmit az összefüggésekről, azok természetéről, fajtáiról.) Ezek a tények azt jelzik, hogy az összefüggés-megértés tartalomba ágyazott szándékos fejlesztése nem reménytelen vállalkozás.

### Összefüggés-megértés



2. ábra

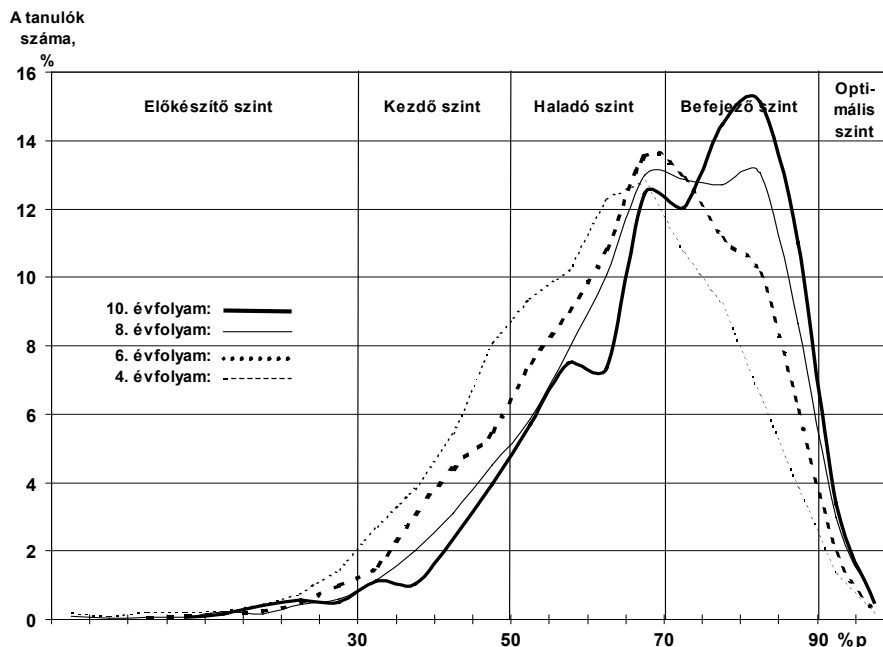
*Az összefüggésfajta-azonosítás és a valószínűség-megállapítás különbségei*

A 3. ábra a tanulók különbségeit (eloszlását) mutatja a teszten elért pontszám (%p) szerint. A négy különböző görbe a négy évfolyamon elért eredmények eloszlását szemlélteti. A fejlesztő kísérlet a fejlődés öt szintjét különbözteti meg. A felmérés adatai alapján az összefüggés-megértés öt fejlődési szintje a következő lehet, amint a 3. ábra mutatja: {előkészítő szint: 0–30%p}, {kezdő szint: 30–50%p}, {haladó szint: 50–70%p}, {befejező szint: 70–90%p}, {optimális szint: 90%p fölött}. Ezek a fejlettségi szintek a csoportképzés alapjai. Ugyanis egészen más a fejlesztés feladata az előkészítő szinten lévők számára, mint a többi szinten lévők esetében. Nem is beszélve az optimális fejlettséget elérőkről, akiknek a fejlesztése befejezhető. Csak a készség szinten tartó használatára van szükség.

A 3. ábra legszembetűnőbb jellemzője, hogy a négy évfolyam tanulóinak eloszlása azonos viselkedésű. Továbbá az átlagok által jelzett lassú fejlődés mértéke pontosan megjelenik az eloszlási görbék különbségeiben is. Ezek a szabályosságok ismételt megerősítik a mérés megbízhatóságát, a valóság hű jellemzését.

Láthattuk, hogy az optimális fejlettséget csak néhány százaléknyi tanuló érte el, de most az is megállapítható, hogy a 4–10. évfolyamokon a tanulóknak mintegy a fele a fejlődés bejező szintjén van. Ez azt jelenti, hogy feltehetően számukra már elegendő lehet egy-két éves fejlesztés. A haladó szinten lévőknek 2–3, a kezdőknek 3–4, az előkészítő szinten lévőknek pedig 5–6 év szükséges az optimális fejlettség eléréséhez.

Mindez azt jelzi, hogy amennyiben a 3. évfolyamon kezdjük a fejlesztést, a túlnyomó többség a 6. évfolyam végéig eljuttatható az optimális szintre. A 7–8. évfolyamra már csak 10–15%-nyi tanuló fejlesztése marad. Legalábbis a folyamatban lévő fejlesztő kísérlet hipotézise szerint. Lássuk, mit kell tenni annak érdekében, hogy ez a cél megvalósulhasson.



3. ábra  
Az összefüggés-megértés fejlettségének különbségei

### Az összefüggés-megértés fejlesztése

Az eddigiek értelmében: az összefüggés-megértés a tudásszerző képesség komplex kognitív készsége. Funkciója, hogy az összefüggések megismerését, elsajátítását és alkalmazását lehetővé tegye. Számos egyszerűbb készségből, valamint a szóban forgó összefüggésre és általában az összefüggésre vonatkozó ismeretekből szerveződik, amelyek a tudásszerzés, az alkalmazás folyamatában aktiválódnak. E komplex készség fejlesztése azt jelenti, hogy a különböző tantárgyakban szereplő összefüggések tanításával az összefüggés-megértés készségét is fejlesztjük, miáltal lehetővé válik a szóban forgó összefüggés alaposabb megértése, elsajátítása, és az összefüggés-megértési készség fejlődésének köszönhetően az újabb és újabb összefüggések megértésében a tanulók egyre gyakorlottabbakká, önállóbbakká válnak. Ugyanakkor az összefüggés-megértés fejlődése (lásd az előző fejezetet) hozzájárul az értelem általános fejlődéséhez is.

Ennek a fejezetnek az a célja, hogy ismertesse a fejlesztés feladatait. Előbb a pedagógus felkészülésének feladatairól, majd négy példa segítségével a fejlesztés feladatairól lesz szó. Az alábbiakban bemutatott feladatokat, módszereket a folyamatban lévő kísérlet működteti. Hatékonyságuk értékelése, fokozatos javítása a kísérlet egyik célja.



### A felkészülés feladatai

Mindenekelőtt ki kell választani azokat az összefüggéseket, amelyeket a *megértés-fejlesztő módszerrel* kívánnak feldolgozni, tanítani. A kiválasztott összefüggések a tantárgy anyagának egymásra épülése, a továbbhaladás szempontjából kulcsszerepet játszó, illetve gyakorlati szempontból fontos összefüggések legyenek. Eleinte (egy-két évig) elemi és egyszerű összefüggéseket tanítsunk megértésfejlesztő módszerrel perceptuális (észleleti) és verbális absztrakciós szinten. A fejlesztés a 3. évfolyamon kezdhető a mindennapi tapasztalat példáival. Ezután lehet a tantárgyak tananyagaiból vett összefüggésekkel folytatni a fejlesztést. A formalizált szinten tanítandó összefüggésekre csak azután kerüljön sor, miután a perceptuális–verbális szintű összefüggés-megértő készség már jól működik. Ez legalább egy-két tanévig tartó különböző tantárgyakban alkalmazott megértésfejlesztést feltételez.

A XVIII–XIX. századi szemléletmód szinte kizárólagos érvényesülése az iskolában többek között azt eredményezi, hogy a tananyagokban jóformán csak szükségszerű összefüggések szerepelnek. Ennek következtében a mindennapi tapasztalatok alapján kezdeti szinten működő valószínűségi gondolkodás az iskola egyoldalú folyamatos hatása következtében visszafejlődik (Csapó, 1994). Ez az egyoldalúság jellemzi a felnőtt lakosságot is. Például még felsőfokú végzettségű emberek között is vannak, akik nem képesek megérteni és elfogadni, hogy a közvélemény-kutatások eredményei meghatározott valószínűséggel érvényesek. Ezért amíg a tantervek, a tankönyvek nem tartalmaznak megfelelő mennyiségű valószínűséginek modellezett összefüggést, addig a nemcsak-akkor feltételű együttjárások megfordításával gyakorolhatjuk a valószínűségi összefüggések megértésének fejlődését. Lásd például a  $k$ -ra végződő főnevek és többes számának  $k$  jele közötti összefüggést. A többes számú főnevek  $k$ -ra végződnek. Ez szükségszerű együttjárás. Megfordítása viszont valószínűségi együttjárás: a  $k$ -ra végződő főnevek többes számúak. (Lásd az *Összefüggésfajták* című pontot és majd a harmadik példát.)

Egy tanórán eleinte egynél több összefüggést ilyen módszerű feldolgozásra ne válasszunk. A többi összefüggés-ismeret a szokásos módon tanítandó mindaddig, amíg maguk a tanulók az összefüggést leíró szabály, a szükséges szemléltetés, példák, esetleírások alapján némi segítséggel maguk is végig tudják járni az alaposabb megértéshez vezető utat. Jóval később (2–3 éves gyakorlás után) valamennyi tanítandó összefüggés feltérképezése is lehetséges, mivel ilyenkor már egy-egy összefüggés a tanulók közreműködésével a tanítás szokásos időigényén kívül várhatóan csak néhány percet vesz igénybe.

Az érvényes összefüggések 3–4 évig tartó megértésfejlesztő tanulása után *érvénytelen összefüggéseket* is elemezni kell, ha azt szeretnénk, hogy a felnövekvők képessé váljanak különbséget tenni érvényes és érvénytelen összefüggés között, hogy megvédhessék önmagukat a babonák, a hiedelmek, a kuruzslások, a logikusnak látszó csalások (például piramiselvű pénzszerzések) fertőzései ellen.

A kiválasztott összefüggéseket előzetesen elemezni kell az előző fejezetekben olvasható ismeretek és a következőkben leírt feladatok és példák szerint. Vagyis végig kell játszani azokat a tennivalókat, amelyeket a tanulókkal közösen is el fogunk végezni. Különös gondot kell fordítani az összefüggés szerkezetének feltárására, fajtájának azonosítására. Önmagunk ellenőrzése céljából kívánatos elvégezni az összefüggés formalizálá-

sát az előző fejezetekben található minták alapján. A formalizálás ugyanis rákényszerít bennünket arra, hogy minden részletében végiggondoljuk az összetevőket, azok kapcsolatait.

Ezek után lássuk a fejlesztés feladatait, amelyeket a tanterv, a tanmenetünk szerint sorra kerülő összefüggésen felkészülés céljából a pedagógusnak is el kell végeznie. (Ez megfelelő gyakorlottság után általában néhány percet igénybe vevő végiggondolást jelent a feldolgozási feladatok szerint.)

### A fejlesztés feladatai

A szokásos tanítási feladat az úgynevezett induktív út bejárása vagy a szabályból kiinduló, például magyarázó deduktívnek nevezett eljárás. E szokásos szóhasználatlaltal fogalmazva a megértés érdekében olyan *tevékenységeket kívánatos végezni és végeztetni, amelyek mind az induktív, mind a deduktív út bejárását megvalósítják*. Az optimális megértés szempontjából azonban nem a feldolgozás induktív vagy deduktív iránya a fontos, hanem azok a tevékenységek, amelyek különböző pontról, különböző tevékenységgel indulva teljesen „körbejárják” az összefüggést. Ugyanis (mint majd a példák szemléltetik) a feldolgozás bármely tevékenységgel kezdhető, és elvileg bármilyen sorrend követhető. Lehetnek gyakrabban alkalmazott sorrendek az összefüggés tartalmától, struktúrájától és a pedagógus szokásaitól függően. A fontos csak az, hogy valamennyi (az adott összefüggés esetén) szóba jöhető feladat, tevékenység elvégzésére sor kerüljön.

A korábban számba vett készségeket és ismereteket az elvégzendő tevékenységekkel megnevezve:

- a) *összefüggés-megismerést* (összefüggés-megfigyelést, esetleírást, szabályfogalmazást);
- b) *szervezetfeltárást* (komplexitás-vizsgálatot, összetevők és kapcsolatuk tisztázását, összefüggés-azonosítást),
- c) *szabálymegismerést* (ismeretfeltárást, absztrakcióváltást, szabályátfogalmazást, szabálymódosítást, felcserélést), valamint
- d) *szabályalkalmazást* (megismerő alkalmazást, cselekvő alkalmazást) végzünk és végeztetünk.

Ezeknek a feladatoknak, tevékenységeknek az elvégzése, elvégeztetése eredményezi az összefüggés-megértést és rendszeres végzése, végeztetése az összefüggés-megértési készség kialakulását, optimális begyakorlását, elsajátítását.

Legyen a példánk az eddig használtak közül az alátámasztás megszűnése miatt leeső test (csak-akkor feltételű és szükségszerű következményű okság), a  $k$ -ra végződő főnevek és a többes számú főnév  $k$  jele közötti összefüggés (szükségszerű és megfordítással valószínű együttjárás), a  $k=2r\pi$  (csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás), valamint egy definíció: „olvadás” (csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás).

Említettem, hogy a sorrend nem döntő. Ezért a négy példa feldolgozását különböző sorrendben ismertetem. Az első példa bemutatása során utalok arra is, hogy mit csinál a pedagógus és milyen tevékenységeket végeztet a tanulókkal. Ezzel mindössze az a célom, hogy szemléltessem: a szokásos oktatási módszerek használatáról van szó. Csak

abban van változás, hogy mire használjuk ezeket a módszereket. A további példákban a tanítási módszerekre már csak elvétve utalok.

### Első példa

Az alátámasztás megszűnésekor a test leesik. Csak-akkor feltételű és szükségszerű következményű okság,  $v(!O) \rightarrow m(!K)$ . A testek leesése mindennapi tapasztalat. Ezen a szinten már harmadikos tanulókkal is végigjátszhatjuk a megértés folyamatát. Ebben az életkorban előnyös az összefüggés-megismerést ilyen köznapi példával és az összefüggés-megismeréssel kezdeni.

#### Összefüggés-megismerés

*Összefüggés-megfigyelés.* Néhányszor elejtünk egy radírt (közel az asztal tetejéhez, hogy majd az ő tárgyuk is lehetőleg a padra essen). A pedagógus néhányszor megismélt leejtő kísérlete után megbeszéljük, hogy mindig leesik-e a radír, ha elengedjük. Ennek utána bevezeti a „*valahányszor elengedjük (megszűnik az alátámasztás), a radír mindannyiszor leesik*” kifejezést. Ezt követően a tanulók a kezük ügyében lévő tárgyat ráejtik a padjukra. Megbeszéljük, hogy ki mit ejtett le. A sokféle dolog közös megnevezésére használjuk a „*test*”, a „*tárgy*” szavakat. Beszélgetünk arról, hogy mi az a *dolog*, amit tartunk és ami leesik: a tárgy (a test). Mi történt a tárgyakkal? Elengedtük, leestek (*sajátságok*). Mi az *oka* annak, hogy leestek? Mi a *következménye* annak, hogy elengedtük?

*Realitásvizsgálat.* A dolog, a sajátságok *reálisak, lehetségesek* vagy *fikciók*. Ebben az életkorban ez a feladat elmaradhat. Különösen, ha most vagy nemrég kezdtük az összefüggés-megértés fejlesztését.

*Esetleírás, szabályfogalmazás.* Próbálgatjuk az összefüggés leírását. Ki tudná elmondani, mi történt a radírral? Meghallgatva a próbálkozásokat, a legjobb javaslatnak megfelelő formában közlünk egy megfogalmazást. Például: amikor elengedem a radírt, leesik. Megbeszéljük, hogy a leírásban az oknak is és a következménynek is benne kell lennie. Továbbá azt is megvitátjuk, hogy miért előnyös a „*valahányszor...mindannyiszor*” szempont szerepeltetése, tudatosítása.

#### Szerkezetfeltárás

*Komplexitás-vizsgálat.* Erre nincsen szükség, mert a példa elemi összefüggés.

*Az összetevők és kapcsolataik tisztázása.* Mivel az okról és az okozatról már szó esett, e feladat elvégzésére csak akkor van szükség, ha az előző tevékenység kiegészítendő, gyakorlandó.

*Az összefüggésfajta megállapítása.* Megkérdezzük és megbeszéljük: *Csak akkor* esik le a tárgy, ha elengedjük (az alátámasztás megszűnik) vagy *nem csak akkor*? A vélemények meghallgatása után közöljük: ez az összefüggés *csak-akkor feltételű*. Ha szükséges, megmagyarázzuk, indokoljuk. Majd megkérdezzük és megbeszéljük, hogy a leesés mindig bekövetkezik-e (*szükségszerű-e*) vagy csak esetenként (a bekövetkezés *valószínű-e*). A vélemények meghallgatása után megállapítjuk, hogy a leesés mindig bekövetkezik, ha

az alátámasztás, felfüggesztés megszűnik. Vagyis ez *szükségszerű összefüggés*. Hasonlóan járunk el annak eldöntését illetően, hogy az összefüggés *okság-e* vagy *együttjárás*. (Ha szükséges, akkor példákkal elmagyarázzuk, hogy mi a különbség az okság és az együttjárás között.) A megbeszélés után megállapítjuk, hogy ez az összefüggés *okság*. Ha kell, megmagyarázzuk. Végül kérjük: próbálják összefoglalni, hogy a három szempont szerint az *összefüggés milyen fajtájú*. Megismételjük, megmondjuk a helyes megoldást: *csak-akkor feltételű és szükségszerű következményű okság*.

### *Szabálymegismerés*

Felidézük a „valahányszor...mindannyiszor” megfogalmazású szabályt: Valahányszor megszűnik a tárgy alátámasztása, a tárgy mindannyiszor leesik.

*Ismeretfeltárás és absztrakcióváltás.* Ellenőrizzük a szabályban szereplő szavak jelentésének ismeretét, és közösen tisztázzuk, pontosítjuk azokat. *Tárgy:* itt szilárd fizikai test. A 3. osztályban a tanteremben lévő szilárd testek közül kell példákat sorolni és egy ellenpéldát említeni (pl. levegő). *Alátámasztás:* kézben tartás, felfüggesztés (tekintsük ezt is alátámasztásnak), földre, padlóra, asztalra stb. helyezés és minden, ami megakadályozza a leesést. *Az alátámasztás megszűnése:* elengedés, lelökés, leszakítás stb. *Leesés:* a Föld középpontja felé zuhanás, amíg valamibe bele nem ütközik, és új alátámasztás nem keletkezik.

Itt a szabály verbális szinten adott, a perceptuális (észleleti) szintre kell átváltani. Ez megtörtént a megfigyeléskor és az ismeretfeltáráskor az észlelhető példák segítségével.

*Átfogalmazás.* Ugyanannak az összefüggésnek sokféle megfogalmazása lehetséges, és sokféle megfogalmazással szembesülünk. Az átfogalmazás azt a célt szolgálja, hogy tanítványaink megtanulják felismerni a különböző nyelvi formában megjelenő összefüggést, hogy tudják: a különböző fogalmazású szabályok ugyanazt az összefüggést írják le, és valamennyi *érvényes* lehet. Mi mondunk néhány változatot, majd a tanulókat kérjük az átfogalmazásra. Néhány példa. Az alátámasztás megszűnése miatt a tárgyak leesnek. Valahányszor megszűnik az alátámasztás, a tárgy mindannyiszor leesik. Ha a tárgyat elengedem, leesik.

*Szabálymódosítás tagadással.* Az érvényes szabály módosítása tagadással érvénytelen és érvényes szabályt eredményez. Elemi és egyszerű összefüggésből három módosított szabályt kaphatunk. A szabálymódosításnak az a célja, hogy tanulóink gyakorolják az érvényes és az érvénytelen összefüggés megkülönböztetését. Ha a tárgyat nem engedem el, leesik (*érvénytelen*). Ha a tárgyat elengedem, nem esik le (*érvénytelen*). Ha a tárgyat nem engedem el, nem esik le (*érvényes*).

*Felcserélés.* A feltétel és a velejáró (az ok és a következmény) felcserélése is segíti az összefüggés alaposabb megértését. A felcserélés kísérlete erősíti annak belátását, hogy az ok és a következmény (okozat) felcserélhetetlen. Például: A tárgy leesése megszünteti az alátámasztást (okozza az alátámasztás megszűnését). Ebben az esetben a megfordítás *értelmetlen* leírást eredményez.

### Szabályalkalmazás

A szabálynak négy funkciója van: közlés, jóslás, magyarázat, előírás. Ennek megfelelően a szabály leíró, jósló, magyarázó és előíró módban fogalmazható meg, illetve a funkciók kérdésekkel fejezhetők ki. A négy funkció működtetése segíti a pontosabb megértést és az eredményesebb alkalmazást. A szabályok mindeddig *leíró módban* fordultak elő, ami implicite magában foglalja a *megismerő alkalmazás* (a jóslás és a magyarázat), valamint a *cselekvő alkalmazás* lehetőségét. A különböző funkciók megfogalmazási módjai az alkalmazást segítő nyelvi eszközök. A funkciók működtetésének célja, feladata, hogy a leíró módból (bármely módból) kiindulva a tanulókkal közösen a többi funkcionális módban is megfogalmazzuk a szóban forgó összefüggést, ami a szabályalkalmazási készség fejlődését szolgálja.

*Megismerő alkalmazás.* Példánk esetében: Valahányszor megszűnik az alátámasztás, a tárgy mindannyiszor leesik (*leíró mód*). Mi történik, ha a tárgy alátámasztása megszűnik? Valahányszor megszűnik a tárgy alátámasztása, mindannyiszor biztosan várható (bekövetkezik, megjósolható stb.), hogy a tárgy le fog esni (*jósló mód*). Mi a magyarázata (feltétele, oka) annak, hogy a tárgy leesett? A tárgyak azért esnek le, mert megszűnik az alátámasztásuk (*magyarázó mód*). A jóslás és a magyarázat a szükségszerű elemi összefüggés ismerete esetében kézenfekvő. A nemcsak-akkor feltételű összefüggések magyarázata, a valószínű velejáráó (következmény) jóslása nagyon sokrétű ismeretet, illetve problémamegoldó stratégiát feltételez. A funkciók szerinti fogalmazási módok gyakorlása az alkalmazási lehetőségek megismerését, megértését segíti.

*Cselekvő alkalmazás.* Mit kell tenni, hogy az alátámasztás megszűnjön, ne szűnjön meg, és mit kell tenni, hogy a tárgy leesését elősegítsük, megakadályozzuk? A gyakorlati alkalmazás a tárgy sajátosságaitól, a meglévő alátámasztástól függően nagyon sokféle lehet, mindegyik külön előírást (elgondolást, sajátos cselekvést) feltételez. Például: Ne tedd a poharat az asztal legszélére (*előíró szabály*)! Ez az egyetlen példa is jelzi a helyzet- és tárgyfüggőségből fakadó sokféleséget, és azt is, hogy az előíró szabály a tapasztalat alapján is kialakulhat, ami nem feltételezi az összefüggés ismeretét. Ennek az az ára, hogy minden speciális esetre sajátos szokást, előíró szabályt kell kidolgozni és az esetre illesztve alkalmazni. *Az összefüggés-ismeret, -megértés óriási jelentősége abban van, hogy minden szóba jöhető változatra, a soha nem tapasztalt helyzetre is alkalmazható.* Tudhatjuk, hogy mit kell tenni, csak a hogyan kell megoldani. A cselekvő alkalmazás gyakorlásával az a cél, hogy a sokféleséget érzékeljék a tanulók, továbbá az, hogy az összefüggések alapos ismerete és megértése nagymértékben megnövelje az eredményes cselekvés lehetőségét.

A tényleges cselekvő alkalmazás sok tanításra szánt összefüggés esetében nem lehetséges, ilyenkor gondolati, illetve szimulatív alkalmazás végezhető.

### Második példa

$K=2r\pi$ . A kör kerülete egyenlő a kétszeres sugár 3,14-szeresével. Valahányszor adott a kör sugarának kétszerese ( $F_1$ ) és e szorzat 3,14-szerese ( $F_2$ ), az mindannyiszor megfelel a kerület hosszának ( $V$ ):  $v(!F_1 \wedge F_2) \leftrightarrow m(!V)$ . Csak-akkor feltételű és szükségszerű

velejárójú együttjárás. E példa megértő feldolgozását kezdjük a szabályismerettel. (Korábban ezt az összefüggést egy feltételüként kezeltem. Most és-sel kapcsolt két feltételt adtam meg. Szándékosan választottam olyan példát, amellyel szemléltethető, hogy az és-sel kapcsolódó feltételek, illetve velejárók egységként tekintendők, de ha úgy előnyösebb, összetevőkre tagolhatók. Itt most a megértés segítése szempontjából előnyösebb a tagolt változat.)

### *Szabálymegismerés*

*Ismeretfeltárás és absztrakcióváltás.* A  $k=2r\pi$  megértéséhez mindenképp ismerni kell a szimbólumok jelentését. Célismeretek:  $k$ : a kör kerülete,  $r$ : a kör sugara,  $\pi$ : 3,14,  $2r$ : a kör átmérője. Előismeretek: kör, kerület, sugár, átmérő, tizedes tört, szorzás, egyenlőség. Ezáltal áttértünk a formalizált szintről a verbális szintre. A megértés kiinduló feltétele, hogy ezekkel az előismeretekkel rendelkezzenek a tanulók, és azok fel is idéződjenek, vagyis fejükben összekapcsolódnak a képlet jeleivel. Ha a felidéztes néhány perce alatt kiderül, hogy az előismeret első rétegének nem minden fogalma ismert a szükséges mértékben, akkor ezeknek a fogalmaknak az előismereteit kell felidézni, vagyis az előismeretek második rétegét. Ez lehet absztrakcióváltás nélküli. Vagyis továbbra is verbális szinten maradva, szavakkal értelmezzük a felhasznált fogalmakat. Ezek a szavak az előismeret harmadik rétegét jelentenek és így tovább. Példánk esetében azonban célszerű áttérni az észleleti szintre. Erre a célra legalkalmasabb egy szűk perccet igénybe vevő mozgókép. (Felrajzolódik egy kör: „rajzoljunk egy kört”. Beíródik és villog a sugár: „ez a sugár, aminek kétszerese az átmérő”. Beíródik az átmérő másik fele, ami más színnel villog. Az átmérő egyszínű másolata kiemelkedik a körből, majd a kör kerületének megfelelővé görbül és háromszor illeszkedik a kör kerületére: „az átmérő háromszor illeszthető a kör kerületére és még marad egy rövid szakasz, ami akkora, mint az átmérő 0,14 század része.” Pirossal villog az átmérő 0,14 század része.) Ha nincs mozgókép, krétával is megoldható a felidézés.

Az első példa esetében a mindennapi tapasztalat szilárd előismereteket hozott létre. *Az iskolai oktatás legnagyobb problémája, sőt bűne, hogy a korábban tanított tudást ismertnek feltételezi.* Ez a tanulók többsége esetén nem áll fenn a memória természetes működése következtében. Homokra építkezünk, egyre csökken a megértés és a szilárd elsajátítás esélye, és növekszik az érdektelenség, esetleg a szembenállás. Kivéve a tanulók szűk rétegét, amely főleg otthoni körülményeinek köszönhetően folyamatosan „képben van”, aktiválódó előismereteinek, képességeinek köszönhetően optimálisan profitál az iskolai oktatásból.

*Az előismeretek rendszeres feltárása, felidézése és az absztrakciós szintek bejárása az új tudás megértésének alapvető és hatékony eszköze. Ugyanakkor minél gyakrabban szükséges valamely előismeret, az a tudásrendszer annál fontosabb eleme. A gyakoribb előfordulás pedig egyre többirányú kapcsolatrendszerrel egyre szilárdabbá, használhatóbbá érleli a tudást. Az előismeretek rendszeres feltárása, absztrakcióváltása természetes rendszerezés és megerősítés.*

*Átfogalmazás.* A képlet szilárd konvenciót követ, átfogalmazás nemkívánatos. A verbális fogalmazási változatok azonban hozzájárulhatnak a megértéshez. Néhány példa: A

### Összefüggés-megértés

kör kerülete az átmérő 3,14-szerese. Ha a kör átmérője ismert, akkor a kerülete annak 3,14-szerese. A sugár kétszeresét 3,14 századdal szorozva, a kör kerületét kapjuk.

*Szabálymódosítás tagadással.* Valahányszor ismerjük a sugár hosszát, mindannyiszor megkaphatjuk a kerület hosszát (*érvényes*). Valahányszor nem ismerjük a sugár hosszát, mindannyiszor megkapjuk a kerület hosszát (*érvénytelen*). Valahányszor ismerjük a sugár hosszát, mindannyiszor nem kapjuk meg a kerület hosszát (*érvénytelen*). Valahányszor nem ismerjük a sugár hosszát, mindannyiszor nem kapjuk meg a kerület hosszát (*érvényes*). Ez a játék ebben a példában triviális, mégis érdemes rászálni egy-két percnyi időt, mert a tagadó kijelentések megértésével gyakran van gond. A gyakorlás segíthet.

*Megfordítás.*  $(k:\pi):2=r$ . Mivel ez az összefüggés csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás, ezért a feltétel és a velejárója megfordítható anélkül, hogy az összefüggésfajta módosulna.

### Összefüggés-megismerés

*Összefüggés-megfigyelés.* Láthattuk, hogy a szabályismerettel kezdve is végeznek a tanulók megfigyelést, ha megfelelően tesszük a dolgunkat. E példa esetében elegendő a mozgóképet újra felidézni, illetve a táblarajzot a tanulókkal értelmeztetni és saját füzetükbe lerajzoltatni. Ennek a tevékenységnek e példa esetében a fő célja a rögzítés.

*Realitásvizsgálat.* Az ábrák és a saját rajz alapján rövid beszélgetés arról, hogy a dolog, vagyis a kör és a felhasznált sajátságai realitások-e. A füzetben lévő kör mint rajz konkrét realitás. De maga a kör és sajátságai (mindezt a rajz csak jelöli) absztrakciók, absztrakt realitások. Ám ez utóbbi témába nem szükséges belemenni, hacsak az osztály nem kezd el vitatkozni. Elég annyi, hogy a kör és sajátságai nem hipotetikus és nem fikatív létezők, hanem realitások. (A középiskolában példák alapján már lehetséges az absztrakt realitásról beszélgetni.)

*Esetleírás, szabályfogalmazás.* Tekintettel arra, hogy a szabályból indultunk ki, most már csak ellenőrzés és gyakorlás céljából kérünk megfogalmazásokat és azok megfordításait.

### Szerkezetfeltárás

*Komplexitás-vizsgálat.* Egyszerű összefüggésről lévén szó, a komplexitás-vizsgálat mindössze annyiból áll, hogy a sugár hosszának kétszerese, és az így kapott szorzat 3,14-szerese a feltétel, a kör kerületének hossza pedig a velejáró.

*Az összetevők és kapcsolataik tisztázása.* A két szorzás kapcsolata konjunkció (és), mert mindkettő együtt felel meg a kerület hosszának (a velejárónak). Az összefüggés csak-akkor feltételű, mivel a kör kerülete csak e feltételeknek felel meg. A velejáró szükségszerűen megfelel a feltételnek. A feltétel nem oka a velejárónak, ezért ez az összefüggés együttjárás.

*Az összefüggésfajta megállapítása.* A fentiek értelmében ez az összefüggés csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás.

### Szabályalkalmazás

*Megismerő alkalmazás.* Valahányszor adott a kör sugara, a kör kerülete mindannyiszor a kétszeres sugár (vagyis az átmérő) 3,14-szerese (*leíró mód*). Mekkora a kör kerülete, ha ismerjük a kör sugarát? A kör sugarának ismeretéből megtudható (jósolható) annak kerülete (*jósló mód*). Mi a magyarázata annak, hogy a kör kerülete  $k$ ? A kör kerülete azért  $k$ , mert a sugara  $r$ , és tudjuk (megmérhető), hogy a kerület a kétszeres sugár 3,14-szerese (*magyarázó mód*). Meg kell mérni a sugár hosszát, és azt meg kell szorozni 2-vel, majd az így kapott számot 3,14 százzal kell megszorozni. A kapott szám mutatja a kerület hosszát (*előíró mód*).

*Cselekvő alkalmazás.* Például: Számítsuk ki a kör kerületét, ha az átmérője 5 m. Továbbá ha a sugár 4 cm. Számítsuk ki a kör sugarát, ha a kerülete 8 cm. Továbbá ha a kerület 5 m 25 cm. Figyeljük meg, hogy az előíró mód és a cselekvő alkalmazás többé-kevésbé független lehet az összefüggés megértésétől. „Vakon” betanulható és működtethető.

### Harmadik példa

A  $k$ -ra végződő főnevek leggyakrabban többes számúak. (A többes szám  $k$  jele után lehetséges toldalékoktól eltekinthetünk, kivéve majd a cselekvő alkalmazást.) Valahányszor a főnév  $k$ -ra végződik, mindannyiszor valószínű, hogy többes számú. Csak-akkor feltételű és valószínű velejárójú együttjárás:  $v(!F) \leftrightarrow m(?V)$ . Megfordítása: A többes számú főnevek mindig  $k$ -ra végződnek. Valahányszor a főnév többes számú, mindannyiszor  $k$ -ra végződik, de nemcsak akkor. Nem csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás:  $v(?F) \leftrightarrow m(!V)$ . Ennek a példának a feldolgozását kezdjük a szerkezetfeltárással. Néhány  $k$ -ra végződő főnév, közöttük egy-két nem többes számú  $k$  végű (kerék) a táblán vagy vetítve. Ezek közös elemzésével tárjuk fel a megfordítással nyerhető kétféle szerkezetet.

#### Szerkezetfeltárás

*Komplexitás-vizsgálat.* Az összefüggés elemi, komplexitás-vizsgálatra nincsen szükség.

*Az összetevők és kapcsolataik tisztázása.* Feltétel:  $k$ -ra végződő főnév. Velejáró: a főnév nagy valószínűséggel többes számú. A megfordítás eredményeként a feltétel: többes számú magyar főnév, a velejáró: biztosan  $k$ -ra végződő magyar főnév.

*Az összefüggésfajta megállapítása.* Csak-akkor feltételű és valószínű velejárójú együttjárás. A megfordítás: Nemcsak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás.

#### Szabálymegismerés

*Ismeretfeltárás és absztrakcióváltás.* Célismeretek (a szükséges sajátságok): a főnév egyes és többes száma, a többes szám jele:  $k$ , a  $k$ -ra végződő egyes számú főnevek. Az előismeretek első rétege a főnév mint az összefüggés tárgya, valamint a célismereteket



értelmező ismeretek. Az előismeretek második rétege verbális szinten meglehetősen nehézkes, ezért az általános iskolában absztrakciót váltás lehet célravezető: A főnév szokásos jellemzése felidézhető, de az észleleti szint feltétlenül szükséges: különböző szófajok példái, amelyek közül a főnevek kiválasztandók. A célismeretek előismeretei is példák-kal idézendők fel.

*Átfogalmazás.* Ha a főnév többes számú, akkor a főnév  $k$ -ra végződik. Ez a szokásos fogalmazás nem mondja meg, hogy a főnév nemcsak akkor végződhet  $k$ -ra, ha többes számú. Ezért a megértés érdekében ki kell egészíteni: ..., de nem csak akkor. A többes számú főnév  $k$ -ra végződik. További változatok az 1. és 2. példa szerint.

*Szabálymódosítás tagadással.* A többes számú főnév nem végződik  $k$ -ra (*érvénytelen*). A nem többes számú főnév  $k$ -ra végződik (*esetenként érvényes*). A nem többes számú főnév nem végződik  $k$ -ra (*esetenként érvényes*). Megfordítások: Nem végződik  $k$ -ra a többes számú főnév (*érvénytelen*). A  $k$ -ra végződő főnév nem többes számú (*esetenként érvényes*). Nem végződik  $k$ -ra a nem többes számú főnév (*esetenként érvényes*).

*Megfordítás.* A megfordítás e példa esetében szerkezetileg másfajta összefüggést eredményez. Az ilyen összefüggéseket valamennyi megértést szolgáló feladat során megfordításaikkal célszerű feldolgozni, amint a fentiek mutatják.

### Összefüggés-megismerés

*Összefüggés-megfigyelés.* A szerkezetfeltárás példák alapján történt, ami indirekt megfigyeléssel valósult meg. Bonyolult összefüggések esetén hasznos gyakorlás lehet az indirekt megfigyelés után is elvégezni a direkt megfigyelést.

*Realitásvizsgálat.* Az összefüggés tárgyai a főnevek, sajátosságai az egyes és többes szám, a többes szám  $k$  jele. Ezek realitások. Az összefüggés reális.

*Esetleírás, szabályfogalmazás.* Ez a feladat az eddigiek során számos változatban megoldott.

### Szabályalkalmazás

*Megismerő alkalmazás.* Mire végződik a szék szó többes számban? A szék szó többes száma székek lesz, vagyis a  $k$  végű egyes számhoz egy újabb  $k$  fog kapcsolódni (*jóslás*). Mi a magyarázata annak, ha egy főnév  $k$ -ra végződik? Az esetek többségében azért végződnek a főnevek  $k$ -ra, mert többes számúak, de vannak olyan egyes számú főnevek, amelyek eleve  $k$  végűek (magyarázat).

*Cselekvő alkalmazás.* Például: Alakítsátok többes számúvá a következő főneveket (15–20 egyes számú ragos és rag nélküli főnév, valamint néhány  $k$  végű egyes számú főnév.) Írjátok át egyes számúvá a következő többes számú főneveket (a példaanyag az előző feladathoz hasonló mennyiségű és változatosságú). Húzzátok alá a következő főnevek közül a többes számúakat (25–30 főnév).

## Negyedik példa

Olvadásnak nevezzük az átmenetet szilárd halmazállapotból folyadék halmazállapotba. A halmazállapot-változás ( $F_1$ ) mindannyiszor olvadás ( $!V$ ), valahányszor a szilárd anyag folyékonyvá válik ( $F_2$ ). Csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú összefüggés:  $v(!F_1 \wedge F_2) \leftrightarrow m(!V)$ . Minden definíció csak-akkor feltételű együttjáró összefüggés. A velejáró leggyakrabban szükségszerű, de léteznek valószínű velejárójú definíciók is (például, ha vannak kivételek). A definíciókat célszerűbb lehet a halmazelmélet jelrendszerével vagy más eszközökkel formalizálni. Most azonban azt törekszem megmutatni, hogy a definíciók is szabályok, amelyek együttjáró összefüggéseket írnak le. Kezdjük a feldolgozást a szabályismerettel.

### Szabálymegismerés

*Ismeretfeltárás és absztrakcióváltás.* Célismeret: olvadás. Az előismeretek első rétege: halmazállapot-változás, szilárd anyag, folyékony anyag, folyékonyvá válás. Az előismeretek második rétege: Ennek az öt fogalomnak az ismeretét verbálisan felidézzük. Az előismeretek harmadik rétege absztrakcióváltás: különböző szilárd testeket, folyadékokat vizsgálhatunk meg, példákkal felidézzük a halmazállapot-változásokat, közöttük néhány szilárd test olvadását demonstráljuk.

*Átfogalmazás.* Például: Vannak olyan szilárd testek, amelyek hő hatására folyékonyvá válnak, ezt a folyamatot nevezzük olvadásnak. Az olvadás olyan halmazállapot-változás, amikor a szilárd test folyékonyvá válik. Az olvadás átmenet szilárd halmazállapotból folyékony halmazállapotba. Ha a szilárd anyag folyékonyvá válik, azt olvadásnak nevezzük.

*Szabálymódosítás tagadással.* Olvadásnak nevezzük az átmenetet szilárd halmazállapotból folyadék halmazállapotba. Ha a szilárd anyag nem válik folyékonyvá, azt olvadásnak nevezzük (*érvénytelen*). Ha a szilárd anyag folyékonyvá válik, azt nem olvadásnak nevezzük (*érvénytelen*). Ha a szilárd anyag nem folyékonyvá válik (elég, szublimál), azt nem olvadásnak nevezzük (*érvényes*).

*Megfordítás.* A szilárd anyag folyékonyvá váló halmazállapot-változását olvadásnak nevezzük. Az olvadás olyan halmazállapot-változás, amikor a szilárd anyag folyékonyvá válik. (Mint korábban olvasható, a csak-akkor feltételű szükségszerű összefüggések megfordíthatók, és az összefüggés fajtája változatlan marad.)

### Szerkezetfeltárás

*Komplexitás-vizsgálat.* A feltétel kételemű: a nemfogalom (halmazállapot-változás) és egy jegy (a szilárd test megolvadása) és-sel kapcsolt viszonya. A velejáró egyelemű. Ez az összefüggés egyszerű.

*Az összetevők és kapcsolataik tisztázása.* A feltétel csak-akkor típusú, a velejáró szükségszerű, a feltétel és a velejáró viszonya: együttjárás.

*Az összefüggésfajta megállapítása.* Ez az összefüggés csak-akkor feltételű és szükségszerű velejárójú együttjárás.

### Összefüggés-megismerés

*Összefüggés-megfigyelés.* A fenti példák alapján az összefüggés tárgyát képező dolgok és sajátságaik tudatosítása. Dolgok: szilárd test (anyag), folyadék; sajátságok: halmazállapot-változás, olvadás (folyékonnyá válás). (Ez az összefüggés definíció, ezért az nem kérdés, hogy minek a hatására következik be az olvadás.)

*Realitásvizsgálat.* Mind a dolgok, mind a sajátságok reálisak.

*Esetleírás, szabályfogalmazás.* Ez már megtörtént.

### Szabályalkalmazás

*Megismerő alkalmazás.* Valahányszor a halmazállapot-változás szilárd test folyékonnyá válása, a halmazállapot-változás mindannyiszor olvadás (*leíró mód*). Hogyan lehet megállapítani, hogy a halmazállapot-változás olvadás? Ha a halmazállapot-változás szilárd test folyékonnyá válása, akkor tudhatjuk, hogy olvadásról van szó, akkor olvadásnak minősíthető (*jósló mód*). Mi a feltétele annak, hogy egy halmazállapot-változást olvadásnak minősítsünk? Az olvadássá minősítésnek az a feltétele, hogy a halmazállapot-változás szilárd test folyékonnyá válása legyen (*magyarázó mód*).

*Cselekvő alkalmazás.* Különböző halmazállapot-változásokról el kell dönteni, hogy közülük melyek minősíthetők olvadásnak, melyek sorolhatók az olvadásfogalom alá (az olvadás halmazába). Definíciók esetén a cselekvő alkalmazás: azonosítás, halmazba sorolás.

## Irodalom

- Bán Sándor (1998): Gondolkodás a bizonytalanról: valószínűségi és korrelatív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris, Budapest.
- Bohm, D. (1960): *Okság és véletlenség a modern fizikában*. Gondolat, Budapest.
- Bohr, N. (1938, magyarul 1964): Ismeretelméleti kérdések a fizikában és az emberi kultúrák. In: *Atomfizika és emberi megismerés*. Gondolat, Budapest.
- Born, M. (1954, magyarul 1973): A kvantummechanika statisztikai jellege. In: *Válogatott tanulmányok*. Gondolat, Budapest.
- de Broglie, L. (1968): *Válogatott tanulmányok*. Gondolat, Budapest.
- Bunge, M. (1959, magyarul 1967): Causality: The place of the causal principle in modern science. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts. *Az okság. Az oksági elv helye a modern tudományban*. Gondolat, Budapest.
- Csapó Benő (1994): Az induktív gondolkodás fejlődése. *Magyar Pedagógia*, 1–2. sz. 53–80.
- Csapó Benő (1998, szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris, Budapest.
- Csapó Benő (1998): Az új tudás képződésének eszköze: az induktív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris, Budapest.
- Csibra Gergely, Gergely György, Nádasdy Zoltán (2000): Az oksági gondolkodás perceptuális alapjai. In: Pléh Csaba, Kampis György és Csányi Vilmos: *A megismeréskutatás útjai*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

- De Koning, E., Hamers, J. H. M. (1999): Teaching inductive reasoning: Theoretical background and educational implications. In Hamers, J. H. M., Van Luit, J. E. H. és Csapó, B. (szerk.): *Teaching and learning thinking skills*. Swets & Zeitlinger Publishers, Lisse, Abington, Exton, Tokyo.
- Fock, V. A. (1962): *A modern természettudományok filozófiai problémái*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Heisenberg, W. (1955, magyarul 1967): Korunk fizikájának világgépe. In: *Válogatott tanulmányok*. Gondolat, Budapest.
- Heisenberg, W. (1952, magyarul 1975): *A rész és az egész. Beszélgetések az atomfizikáról*. Gondolat, Budapest.
- Klauer, K. J. (1999): Fostering higher order reasoning skills: The case of inductive reasoning. In Hamers, J. H. M., Van Luit, J. E. H. és Csapó, B. (szerk.): *Teaching and learning thinking skills*. Swets & Zeitlinger Publishers, Lisse, Abington, Exton, Tokyo.
- Michotte, A. (1963): *The perception of causality*. Methuen, London.
- Miller, G. A. (1956): The magical number seven: plus or minus two. Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63. 81–97.
- Müller Antal (1979): *Kölcsönhatás és meghatározottság*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Nagy József (1985): *A tudástechnológia elméleti alapjai*. Országos Oktatástechnikai Központ, Veszprém.
- Nagy József (1987, 1990): *A rendszerezési képesség kialakulása. A gondolkodási műveletek elsajátítása*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Nagy József (2000a): *XXI. század és nevelés*. Osiris, Budapest.
- Nagy József (2000b): A kritikus kognitív készségek és képességek kritériumorientált fejlesztése. *Új Pedagógiai Szemle*. 8–9. sz. 255–269.
- Piaget, J. (1930): *The child's conception of physical causality*. Harcourt, Brace and Company, New York.
- Planck, M. (1958, magyarul 1965): *Válogatott tanulmányok*. Gondolat, Budapest.
- Schrödinger, E. (1951-1964, magyarul 1985): Mi a „reális”? In: *Válogatott tanulmányok*. Gondolat, Budapest.
- von Weizsäcker, C. F. (1951, magyarul 1980): Einstein és Bohr: A fizikusok vitája a valóság fogalmairól. In: Carl Friedrich von Weizsäcker: *Válogatott tanulmányok*. Gondolat, Budapest.

## ABSTRACT

JÓZSEF NAGY: THE COMPREHENSION OF RELATIONS

The concept of causal determinism has been undermined in the course of the 20<sup>th</sup> century. Recent views treat causality as a special case of co-occurrence and necessity (i.e. a consequence which will invariably occur) as a special case of probability. The present paper reports an enterprise with a double aim. (1) To provide a tool for theoretical clarification, a system for the description and classification of relationships is presented. (2) To provide empirical grounding for educational work helping the development of comprehending relations, findings from a large scale survey are discussed. A relation is defined as the relationship of condition F and co-occurring phenomenon V, where every time condition F is present, co-occurring phenomenon V will be probably present. In the traditional terminology, the condition is either necessary and sufficient, or necessary but insufficient. The presence of the co-occurring phenomenon is either certain or probable. The relationship between the condition and the co-occurring phenomenon is either co-occurrence or causality. When it is causality, the condition is a reason and the co-occurring phenomenon is its consequence. Co-occurrences are commutative; causal relations are not. Because the condition, the consequence and the relationship connecting them alike can be one of two alternatives,  $2^3=8$  relation types are possible. First these basic relations are introduced; then simple and complex relations are characterised; and finally real, potential and fictitious relations are distinguished. Issues in the comprehension of relations are discussed drawing on recent findings in psychology and especially the PDP model. The hereditary foundations of relation comprehension (relation perception) are identified and a model is drawn to characterise their development into explicit perceptual and concept-level relation comprehension, i.e. relation discovery (rule induction), rule formulation and the comprehension of relations discovered by earlier generations. The developmental model is constructed on the basis of the findings of empirical research on the cognitive ability of comprehending relations. A diagnostic instrument was developed by the author for the assessment of this ability and administered to a nationally representative sample of approximately 20,000 8-16-year-olds. The results are discussed in terms of their relevance and potential for facilitating the developmental processes revealed.

Magyar Pedagógia, **100**. Number 2. 141–185. (2000)

Levelezési cím / Address for correspondence: Nagy József, Szegedi Tudományegyetem, Pedagógiai Tanszék, H-6722 Szeged, Petőfi S. sgt. 30–34.