

CSAPÓ BENŐ

A KOMBINATÍV KÉPESSÉG  
ÉS MŰVELETEINEK VIZSGÁLATA 14 ÉVES TANULÓKNÁL

Világszerte egyre határozottabban jelentkezik az igény, hogy az iskola ne csupán ismereteket közvetítsen, hanem hatékonyan fejlessze a gondolkodás képességeit is. E feladat megvalósításához azonban szükség van a képességek és a gondolkodás alapos megismerésére, a pszichológia általános és elvont eredményein túl konkrét, pedagógiai indíttatású vizsgálatokra, a képességek struktúrájának és fejlődési folyamatának feltárására.

A József Attila Tudományegyetem Pedagógiai Tanszékén dr. Nagy József professzor vezetésével öt évvel ezelőtt átfogó kutatás indult a gondolkodás művelési képességeinek tanulmányozására. Kutatásaink alapkoncepciója értelmében az ember tanult képességei négy nagy képességrendszerre, általános képességgé szerveződnek: kommunikatív képességgé, alkotó képességgé, önfejlesztő képességgé és irányító képességgé (Nagy, 1980). Ezek részeik, alkotóelemeik, kapcsolataik révén átszövik egymást. Az általános képességek közös részét egy kötött struktúrájú műveletrendszer képezi, ennek összetevőit nevezzük *művelési képességeknek*. Négy komplex művelési képességet vizsgálunk, mégpedig a rendszerezési, a kombinatív, a logikai és a bizonyítási képességet.

A munka során 14 éves tanulók körében kiterjedt empirikus vizsgálatokat végeztünk a művelési képességek struktúrájának tanulmányozására, és két másik korosztályon (11 és 17 éves tanulók) a fejlődés folyamatának feltárása érdekében.

E tanulmányban a kombinatív képesség vizsgálatáról számolunk be. Terjedelmi korlátok miatt az elméleti előmunkálatoknak csak a fontosabb mozzanatait foglaljuk össze, az empirikus anyagból pedig a tesztfeladatok struktúráját és egy korosztály, a 14 évesek teljesítményeinek alapvető statisztikai jellemzőit mutatjuk be.

*1. Elméleti háttér*

Az emberi kombinativitás problémája régóta foglalkoztatja a pszichológusokat. Érdekes módon azonban a pszichológia, legalábbis ami az első megközelítéseket illeti, a kombinativitással csupán mint a tudatos folyamatok háttérében meghúzódó mechanizmussal számolt. A kombinativitás problémája a pszichológiában először a fantáziával, a képzelettel kapcsolatban merült fel, melyről az első átfogó elméleti koncepciót az asszociációs pszichológiai iskola dolgozta ki.

Az asszociációs pszichológia felfogása szerint a képzeletnek alapvetően két formája van. A reprodukív képzelet a valóságban is meglévő jelenségeknek, korábban átélt

benyomásoknak, képeknek a reprodukálása. Ezzel szemben az alkotó képzelet előzőleg nem tapasztalt módon rendezi át a valóság egyes elemeit, s ezek új kombinációit hozza létre.

Az elmélet értelmében a képzelet képes a korábban észlelt elemek nagyszámú, a valóságban nem tapasztalható kombinációját létrehozni, de nem képes új elemeket alkotni. Nem ad azonban számot arról, hogy milyen módon jönnek létre az új kombinációk, vagy pedig azok létrejöttét véletlenszerűnek tekintik.

*Wundt* álomelmélete az álmot is a valóságban megélt benyomások teljesen új, szokatlan, néha fantasztikus kombinációjaként értelmezi. Az elemek kombinálódása véletlenszerű, illetve az agykéregben lejátszódó elektromos folyamatoktól függ. Ez a felfogás a kombinációk képződését lényegében az intellektus működésének tudattalan mechanizmusaként, az álom esetében egyenesen fiziológiai folyamatként értelmezi. Tehát az emberi kombinativitás csupán a filogenetikai fejlődés során létrejött biológiai produktum lenne.

Semmi okunk sincs elvetni azt a gondolatot, hogy az agykéreg elektromos folyamatai vagy az intellektus tudattalan mechanizmusai „automatikusan” ingerek, benyomások, képzetek nagyszámú kombinációját termelik ki, azonban ha az ontogenetikus fejlődés tényeivel, különösen pedig a tanulás szerepével is el akarunk számolni, nem szűkíthetjük le az alkotó fantáziát, általában az alkotóképességet a kombinativitásra, és a kombinativitást is többnek kell tekintenünk az előzőekben jellemzett tudattalan folyamatoknál.

*Rubinstein* az elemek kombinálását szintén a képzelet egyik működési mechanizmusának tekinti, bár kiemeli, hogy nem ez az egyetlen mechanizmus: „A valóság észlelése nem megváltoztathatatlan elemek kötegeiből, csomóiból vagy mechanikus halmazából áll. Minden képződményét átalakítja a képzelet. Ezek az átalakítások rendkívül sokfélék, közéjük tartozik a kombináció mint a fogások egyike, de nem lehet erre korlátozni: a kombináció csak az egyik fajtája vagy fogása a képzelet átalakító tevékenységének. Ennek eredményeként nem változatlanul adott elemek vagy vonások új kapcsolata, kombinációja keletkezik, hanem egységes új kép, amelyben az egyes vonások nem egyszerűen összegződnek, hanem át is alakulnak, általánosítódnak. A kombinálás csak »mechanizmus«, hatása rendszerint valami olyan tendenciának engedelmessékedik, amely meghatározza a kombinálandó mozzanatok összeválogatását és értelmet lehel azokba.” (*Rubinstein*, 1964. 519.)

Adós marad azonban *Rubinstein* annak felvázolásával, milyen mechanizmusok, átalakítások jöhetnek számításba a kombinálás mellett, és mi ezeknek az egymáshoz való viszonya.

Az alkotó képzelet problémája átvezet az alkotó gondolkodás, a kreativitás kérdéséhez.

Az alkotóképességet, az alkotás folyamatát már *Leibnitz* is összekapcsolja a kombinativitással. Többek között a kombinatorika kifejlesztésén is azért munkálkodott, hogy az új alkotások létrehozásának egyetemes eszköze lehessen. Egy másik matematikus, *Poincaré* elképzelése szerint a matematikai alkotás folyamatában a tudatos szint alatt az összekapcsolható elemek nagyszámú kombinációja képződik, és ezek közül egy szűrőn keresztülhaladva csak azok tudatosulnak, amelyek bizonyos esztétikai követelményeknek eleget tesznek. (*Poincaré*, 1908.)

Az asszociációs pszichológia koncepciójára alapozva dolgozza ki kreativitáselméletét *S. A. Mednick*. *Mednick* elmélete szerint az alkotó folyamat lényege az, hogy olyan új képzettársítás-kombinációk jönnek létre, amelyek megfelelnek bizonyos hasznossági feltételeknek. Változatos kombinációkat azok az emberek képesek produkálni, akik távoli, a megszokott környezetben össze nem tartozó dolgok között létesítenek kapcsolatot. E megfontolás alapján dolgozta ki az alkotóképesség mérésére a „Remote Associations Test”-et, amely lényegében az asszociációk változatosságával és szokatlanságával jellemzi a kreativitást. (*Mednick*, 1962.)

*Guilford* ismert kreativitáseméletét pszichometriai vizsgálatának eredményeiből kiindulva építette fel. Kifejezetten nem foglalkozik az alkotó folyamat mechanizmusával és e mechanizmusokban a kombinálás szerepével, azonban kreativitásmodelljében a fluencia faktorai tartalmazzák a kombinatív mozzanatokot. (*Guilford*, 1950; 1959.) Egy másik, ugyancsak gyakran idézett modellben, *Lowenfeld* kreativitásmodelljében a variabilitás faktorai foglalnak magukban kombinatív mozzanatokot. (Ismerteti: *Landau*, 1971.)

Az alkotó képzelet és a kreativitás pszichológiai elméletei tehát érintik ugyan a kombinativitást, kiemelik szerepét az alkotó folyamatban, helyét, struktúráját, viszonyát az egyéb részekhez, eredetét, kialakulásának folyamatát azonban ezek a megközelítések nem tisztázzák.

A kombinatív képesség tanulmányozásában új fejezetet jelent *Jean Piaget* munkássága. Művei a kombinatív képesség vizsgálata szempontjából legalább három ponton jelentenek nagy előrelépést. Ezek: a kísérleti fejlődéslelektan ismeretelméleti háttérének kidolgozása, amely tisztázza az értelem műveleti struktúráinak, így egyben a kombinatív műveleteknek is az eredetét; a kombinativitás és a logikus gondolkodás viszonyának s a kombinatív műveletek szerepének kidolgozása; valamint néhány kombinatív művelet kialakulásának kísérleti vizsgálata.

Ismeretelméletének, a genetikus episztemológiának (l. pl. *Piaget*, 1972.) lényeges vonása annak kiemelése, hogy tudásunk forrása nem csupán az érzékelés és az észlelés, hanem a cselekvés is. A cselekvés, a tevékenység során a környező valóságon végzett műveletek belsővé válnak, kiépülnek az értelem műveleti struktúrái. Vagyis: az értelem műveleti struktúrái a tevékenységen keresztül az anyagi világ struktúráit képezik le. *Piaget* szerint a matematika is a valóság struktúráit tükrözi, s az értelem műveleti struktúrái és a matematika legáltalánosabb struktúrái megegyeznek. Kísérleti munkája ennek az egyezésnek a feltárására, bizonyítására irányul.

*Piaget* szerint a fejlődés folyamatában a konkrét műveletekről a formális műveletekre való áttérés a 16 kétváltozós logikai művelet kialakulásával jellemezhető. A 16 kétváltozós logikai művelet kialakulását pedig egy kombinatorikai struktúra kiépülése teszi lehetővé. Vizsgálatai szerint a konkrét műveletek szintjén megjelenő osztályozások, soralkotások, megfelelések fokozatosan rendszerré szerveződnek. Egyben kialakulnak a tárgyakon végzett konkrét műveleteknek megfelelő, a dolgok, jelenségek tulajdonságait kifejező ítéletek közötti műveletek is. Az ítéletek közötti műveletek úgy alakulnak ki, hogy kezdetben létrejönnek az ítételekből álló párok, majd a megfelelő kombinatorikai séma kiépülése után a párosítások kombinatorikailag lehetséges összessége. A lehetséges és az igaz párosítások megkülönböztetése vezet el a logikai műveletek kialakulásához. (*Inhelder-Piaget*, 1955.).

Végül *Piaget* azon munkáit kell áttekintenünk, amelyek közvetlenül a kombinatív műveletek kialakulásának folyamatát tanulmányozzák. (*Piaget-Inhelder*, 1951. VII., VIII., IX. fejezet, illetve *Inhelder-Piaget*, 1955. VII. fejezet). E munkákban négy kombinatív művelet kialakulásának vizsgálatával találkozunk: a kombinációk, a permutációk, az ismétléses variációk és a halmaz összes részhalmazának képzésével (különböző elemszámú kombinációk képzésével). Ezekben a vizsgálatokban a kísérleti személyeknek konkrét tárgykból (pl. korongokból, pálcikákból) kell a feltételeknek megfelelő lehetséges összeállításokat elkészíteniük. Bár a *Piaget* által vizsgált műveletek kialakulásában vannak minőségi különbségek, időbeli eltolódások, összefoglalva elmondhatjuk, hogy a fejlődés első stádiumában levő kísérleti személyek próbálkozással, véletlenszerűen, minden szisztéma nélkül készítik el a feltételeknek megfelelő összeállításokat. A második stádiumra a rendszer keresése, a néhány összeállítás felsorolására alkalmas részsztémák kialakulása jellemző. A harmadik stádiumban az összes összeállítás (ami a feladattól függően lehet permutáció, variáció, kombináció) egyetlen alapelv szerinti módszeres felsorolását figyelhetjük meg; ekkorra alakulnak ki a teljes felsorolást lehetővé tevő műveleti sémák.

*Piaget* a kombinatív műveletek kialakulását a logikai műveletekkel és a véletlen fogalmával kapcsolatban tanulmányozza, nem fordít azonban figyelmet arra, hogy a kombinatív műveletek egymáshoz való viszonyát tisztázza, és a kombinatív képességet mint rendszert építse fel. Ez abból a felfogásból következik, hogy a kombinativitást az egész logikai műveletrendszert, sőt a gondolkodás más területeit is átható jelentőségűnek, azonban mégis másodlagos, alárendelt szerepet játszó tényezőként kezelte. Valószínűleg ezzel magyarázható, hogy bár *Piaget*-nak nagy hatása van a XX. sz. közepe utáni pszichológiára, az egész matematikatanítás megújulására, az általa elkezdett munka a legtöbb területen követőkre akadt, a kombinativitás vizsgálatának kiteljesedésére azonban nem került sor. Szemben a logikai, rendszerezési vagy csoport-struktúrákkal, a kombinatorika nem vált a különböző pszicho-matematikai vizsgálatok központi kérdésévé, és nem kapott súlyának megfelelő szerepet a legtöbb új matematikatanítási koncepcióban sem. (Bár kétségtelen, hogy sok kísérlet folyik *Piaget*-szellemében a kombinatorika egészen korai tanításával kapcsolatban.) (*L. Varga, 1967; Türke, 1967*)

A kombinativitás pszichológiáját érintő vizsgálatok történetének rövid áttekintéséből is kitűnik, hogy a kombinatív képességnek a gondolkodás fejlődésében meghatározó szerepe lehet, ugyanakkor felépítése, fejlettségének átlagos szintje, a kialakulás folyamata, kialakításának, fejlesztésének lehetőségei és határai kevésbé ismertek.

Egy pedagógiai irányultságú kutatásnak elsősorban az emberi kombinativitás optimális mértékű kifejlesztésének lehetőségeit kell feltárni. Ahhoz azonban, hogy a fejlesztés stratégiáit kidolgozzuk, mindenekelőtt ismernünk kell az adott társadalmi-kulturális környezetben „spontán”, természetes módon, direkt tanítás nélkül kialakuló kombinativitás struktúráját, fejlődésének mechanizmusát. A megismerési folyamat részletekbe menő empirikus vizsgálatokat igényel, és ehhez mérőeszközökre, feladatrendszerekre van szükségünk. A tesztek pedig csak akkor tudjuk elkészíteni, ha elméletileg tisztázzuk a kombinativitás lényegét, mibenlétét, és kidolgozzuk a kombinatív képesség hipotetikus modelljét.

## *2. A kombinatív képesség hipotetikus modellje*

A kombinatív képesség általunk kialakított elméleti koncepcióját itt csupán vázlatosan ismertetjük, elsősorban azokat a mozzanatokot kiemelve, amelyek a bemutatandó empirikus anyag értékeléséhez szükségesek. Kutatásunknak mind az elméleti, mind pedig az empirikus anyagából azokat a részeket igyekeztünk kiválasztani, amelyek közel állnak a matematikatanítás problémáihoz is. Szeretnénk azonban külön is hangsúlyozni, hogy vizsgálatunk egésze nem a matematikatanítás kérdéseivel, hanem gondolkodásunk alapvető képességeivel, ezek fejlesztésének lehetőségeivel kapcsolatos. Kétségtelen viszont, hogy a szóban forgó képességek kifejlesztésének egyik legfontosabb területe a matematika.

Koncepciónk kialakításához elsősorban két forrásból merítettünk. Egyfelől a matematikai kombinatorikából. Ha ugyanis elfogadjuk, hogy pszichikus rendszereink, műveleti képességeink a valóság struktúráinak elsajátítása, belsővé válása révén alakulnak ki, és a matematika ugyancsak a valóságot képezi le, a kombinatorika alapjainak elemzéséből következtethetünk kombinatív műveleteinkre. Bár a közös eredet ellenére mindkettő saját belső törvényei szerint fejlődik. Ezért a matematika felépítéséből nem következtethetünk közvetlenül a gondolkodás struktúrájára, de még az analógiák köre is nagyon szűk, csak az

eredetre, a legelemibb alapokra korlátozódik. Másik forrásunk a pszichológia, a pszichológiában a képességekről és a gondolkodásról felhalmozott ismeretek összessége.

De mit is értünk kombinatív képességen? Ezt a fogalmat két szinten fogjuk meghatározni. Egyrészt jellemezzük a tágabb értelemben vett kombinatív képességet, majd meghatározzuk az annak részét képező, művelési képességként leírható, szűkebb értelemben vett kombinatív képességet.

Ha a kombinatorika és az emberi gondolkodás kombinativitásának kapcsolatát tekintjük, el kell vetnünk azokat a naiv feltételezéseket, amelyek szerint van egy tudatalatti vagy éppen tudatos, esetleg automatizálódott mechanizmusa a gondolkodásnak, ami bonyolult, soktényezős feltételek között is alkalmas az összes lehetőség számbavételére, felsorolására, mérlegelésére. Egy ilyen mechanizmus ugyanis a legtöbb gyakorlati probléma esetében már a mennyiségi arányok miatt sem működhetne. Másrészt pedig gyakran nem is adottak közvetlenül azok az elemek, amelyeket kombinálni kell, és nincs pontosan meghatározva az sem, hogy az elemekből összeállított konstrukcióknak milyen feltételeket kell kielégíteniük (pl. egy novella meghatározott mondata).

A változók vagy a változók lehetséges értékei számának növekedésével az összes lehetőség exponenciálisan vagy hatványozottan nő, és ez csakhamar az úgynevezett kombinatorikai robbanáshoz, az összes lehetőség számának kezelhetetlen mértékű növekedéséhez vezet. A növekedés arányaira jellemző, hogy némelyik egyszerűen megfogalmazható gyakorlati optimalizációs probléma megoldási variációinak száma olyan nagy, hogy azok egyenkénti értékelésére még a lehetőségek határait súroló sebességgel működő számítógépek sem lennének képesek.

Érdekes módon azonban azt tapasztaljuk, hogy az ember naponta dönt ilyen kérdésekben, és ha nem is mindig az optimális, de az adott feltételek között a lehető legjobb alternatívát választja. Mivel bizonyos problémákra nem lehet az emberi gondolkodással versenyképes algoritmusokat készíteni, ezért némely matematikus hajlik is arra a feltételezésre, hogy az emberi agy egy másik matematikát használ.

A fenti ellentmondás feloldására annak figyelembevételének lehetősége is kínálkozik, hogy az ember döntéseiben felhasználja tapasztalatát, ismereteit. Ha ugyanis bizonyos kombinatorikai sémák alapján kezelhető mennyiségű lehetőséget állítunk elő, majd ezek között tudásunkra támaszkodva szelektálunk, és csak a releváns lehetőségeknek képezzük újabb változatait, a potenciálisan nagyszámú lehetőségből a lehetőségek egyenkénti vizsgálata nélkül is ki lehet választani a gyakorlatilag megfelelőt.

A gondolkodásunkban megnyilvánuló, legáltalánosabban értelmezett kombinativitásra az jellemző, hogy nem rendelkezik állandósult, kötött szerkezettel, benne a véletlenszerű próbálgatás, a tapasztalat, az ismeretek felhasználása és a lehetőségek kombinatorikai sémák alapján való számbavétele keveredhet. Az ilyen tágan értelmezett kombinatív képességet az általános képességek részének tekintjük, mivel hatása az intellektuális folyamatok széles körében megnyilvánulhat. (Pl. egy épület megtervezésében, egy vers megírásában, egy zenemű megalkotásában, de akár olyan hétköznapi jelenségekben is, mint a választékos öltözködés.) A kombinatív képesség ezen általános (kötetlen) formájával akkor találkozunk, ha az adott tárgy, jelenség bonyolult, soktényezős, vagy ami a leggyakoribb, nem adottak expliciten a kombinálandó elemek, és az elkészítendő produktum leírása is csak nagyon vázlatosan körülhatárolt. Ilyen esetben végtelen sok, de legalábbis gyakorlatilag kezelhetetlen mennyiségű megoldás elégíti ki a feltételeket.

Ha azonban a kombinatív képesség olyan feltételek között működik, amikor kevés szempontot kell számításba vennünk (kicsi a kombinálandó elemek száma), pontosan adott az, hogy az elemekből milyen konstrukciót kell létrehozni (a következőkben minden pontosan leírható összeállítás közös megnevezésére, legyen az variáció, per-

mutáció vagy kombináció, a *konstrukció* kifejezést használjuk), maga a probléma, a feltételek meghatározzák, hogy hányféle konstrukció elégíti ki a feltételeket. (Pl.: két különböző zakókn és háromféle nadrágnak van. Milyen lehetőségeink vannak a felöltözésre?) Ilyenkor módunk van az összes eset létrehozására, felsorolására, vagy legalábbis végiggondolására, mérlegelésére.

Egy-egy feltételrendszernek megfelelő felsorolás, gyakran végrehajtva, tevékenységünk elemi operációinak mindig azonos sorrendben lefutó láncolatává válik. Az elemi operációk láncolatainak állandósulásával, belsővé válásával alakulnak ki a *kombinatív műveletek*. A kombinatív műveletek kialakulásával és rendszerbe szerveződésével pedig kialakul a szűkebben értelmezett, *műveleti képességként* leírható *kombinatív képesség*.

Ezen a ponton rövid kitérőt kell tennünk, hogy az itt bevezetett fogalmak értelmét pontosabban megvilágítsuk. Nézzük először a *műveleti képesség* fogalmát. E fogalmat legkönnyebben a készségek és az általános képességek fogalmával összehasonlítva értelmezhetjük. A készségek, tevékenységünk automatizált komponensei, mindig valamilyen konkrét tartalomhoz kötődnek (pl. az írás készsége, az olvasás készsége, igeragozás stb.), ezzel szemben a műveleti képességek sokféle szituációban, sokféle tartalommal működőképesekek (pl. kombinálhatunk tárgyakat, jeleket, szavakat stb.). Hasonlóság viszont a készségek és a műveleti képességek között az, hogy struktúrájuk, vagyis a bennük megjelenő elemi operációk sorrendje kötött. A műveleti képességek és az általános képességek közös vonása, hogy nem kapcsolódnak konkrét tartalomhoz, többféle tevékenység szabályozásában megjelenhetnek, viszont különböznek abban, hogy a műveleti képességek elemi operációk kötött sorrendű láncolatából állnak, ellentétben az általános képességekkel (Nagy, 1980).

A *kombinatív műveletek* fogalmát részben már értelmeztük. Csupán azzal egészítjük ki, hogy a művelet fogalmát itt nem matematikai, hanem pszichológiai értelemben használjuk. Piaget megfogalmazása szerint „Kibernetikai nézőpontból egy művelet egy tökéletes reguláció. Ez azt jelenti, hogy egy műveleti rendszer (operational system) kiküszöböli a hibát, mielőtt az fellépne . . .” (Piaget, 1971. 15.) A kombinatív műveletek pszichikus rendszerek, melyek a megfelelő tevékenységet (adott elemek adott feltételeket kielégítő összeállításainak felsorolása) szabályozzák.

A következő kérdés, melyet meg kell válaszolnunk az, hogy melyek a kombinatív műveletek, illetve, hogy a szűkebben, műveleti képességként értelmezett kombinatív képesség milyen elemekből és hogyan épül fel. Természetesen ez egy olyan alapkérdés, amelynek megválaszolására egész kutatómunkánk irányul. Mégis szükséges volt, hogy előzetesen megfogalmazzunk néhány olyan hipotézist, amelyek alapján tesztjeinket felépíthetjük.

Ezen a ponton ismét a matematikához fordultunk. Annak számbavételére volt szükség, hogy melyek azok a környezetünkben, a tárgyi valóságban előforduló legalapvetőbb kombinatorikai struktúrák, amelyeket a tevékenységeinkben leggyakrabban leképezünk. Ehhez a kombinatorika alapjainak elemzésére volt szükség. Köztudomású azonban, hogy a kombinatorikának nincs olyan kialakult egységes rendszere, mint más matematikai diszciplínáknak, ma a kombinatorikát még különböző problémák zárt összefüggő halmazának tekintik. Nem támaszkodhattunk tehát olyan alapra, mint például gondolkodásunk logikai műveleteinek vizsgálatakor a matematikai logikára.

A kombinatorika elemei hagyományosan az ismétléses és ismétlés nélküli permutációk, variációk és kombinációk, egyes feladatok pedig a kiválasztás és a rendezés műveleteire vezethetők vissza. Ezek az alapfeladatok egymásból többféleképpen származtathatók, többféleképpen rendszerezhetők, tanításuk során többféle megoldás alkalmazható. A kombinatorika hagyományos iskolai tanítása többnyire csak a lehetőségek számának meghatározásával foglalkozott, nem pedig a lehetőségek felsorolásának kérdésével. A tárgyalás rendje a formális, külsődleges összefüggéseket vette alapul, és nem a lényeges belső strukturális elemeket. (E problémákat itt nem fejti ki, L. Csapó, 1979.)

A kérdés, amit mi felteszünk, nem az, hogy hogyan lehet a kombinatorikai alapfeladatokat matematikailag legegyszerűbben bevezetni, a „legelegánsabban” rendszerezni, hanem az, hogy a többféle rendszerezési lehetőség közül melyiket tűnteti ki az emberi gondolkodás. Melyik a „természetes” rendszer, mely műveletek milyen sorrendben jelennek meg, milyen fejlettséget érnek el a különböző tanulóknál direkt tanulás nélkül?

Tesztjeink elkészítése előtt tehát arra vonatkozóan kellett feltevéseket megfogalmaznunk: vajon hogyan fejlődik ki gondolkodásunk kombinatív műveleti rendszere?

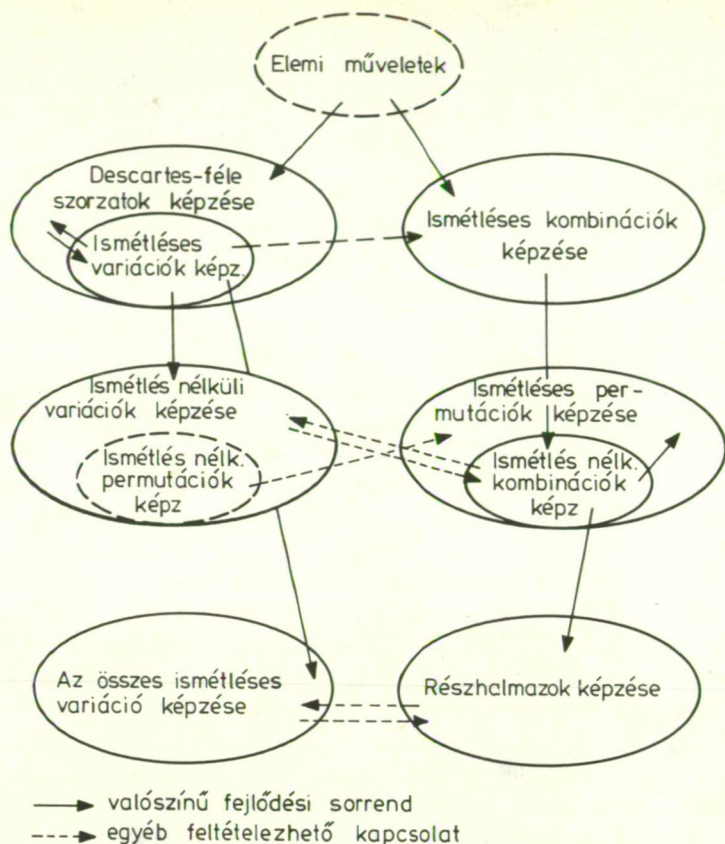
Megfontolásaink eredménye az 1. ábra alapján tekinthető át. A matematikai és a pszichológiai szempontokat mérlegelve arra a következtetésre jutottunk, hogy tesztjeink legcélszerűbben egy nyolc feladattípusból álló rendszerre építhetők. Feltételeztük, hogy az elemi műveletek (azok, amelyek még nem kombinatív műveletek, de amelyek azok kialakulásában részként jelen vannak, például: a felcserélések, eltolások stb.) integrálódása és differenciálódása révén két irányba haladva épül ki a kombinatív műveletek rendszere.

Az egyik oldalon megjelennek a „variálás” műveletei. A halmazok Descartes-féle szorzatának képzését – amelyet ugyan nem szoktak a kombinatorika körébe sorolni – tekintjük az egyik legegyszerűbb kombinatív műveletnek. Ennek egyik speciális esete az ismétléses variáció. Hasonló típusú feladat az ismétlés nélküli variációk képzése, amelynek egyik aloszele az ismétlés nélküli permutáció. (Ezt nem is kezeltük külön típusként.) Az olyan jellegű felsorolások vizsgálatára, amelyekben nem minden konstrukció áll azonos számú elemből, felvettünk még egy feladattípust, amelyben az összes – legfeljebb (megadott)  $k$  elemű – ismétléses variáció képzése a feladat.

A másik oldalon megjelenő műveleteket, a „kombinálás” gyűjtőnéven foglaltuk össze. Ezek legegyszerűbb típusa az ismétléses kombináció. Ebből származtatható az ismétlés nélküli kombinációk képzése, amelynek általánosításával az ismétléses permutációk képzéséhez jutunk. (Ez utóbbi két feladat egyaránt halmazok rendezett osztályozásait feltételezi.) Végül pedig az összes – különböző számú elemből álló – ismétlés nélküli kombináció képzése, vagyis egy halmaz részhalmazainak képzése tartozik ide.

Nem térünk ki részletesen a felvázolt rendszer indoklására. Csupán azt említjük meg, hogy egyszerűbbnek tekintettük azt a feladatot, amelyik kevesebb külső feltételt tartalmaz, tehát pl. ha nem volt kikötve, hogy egy konstrukcióban nem szerepelhetnek azonos elemek. (Kombinációk képzésének a vizsgálatok fiatalabb gyermekeknél Piaget is megengedte az ismétlődést. L. *Piaget-Inhelder*, 1951. 175.) Így néhány ponton ellenkező sorrendhez jutottunk, mint amit a kombinatorika tanításában követni szoktak.

A bemutatott modell csupán tesztjeink feladattípusainak számbavételére szolgál. Az, hogy valójában milyen is a kombinatív műveletek rendszere, az empirikus vizsgálatok alapján dönthető el. (Bizonyos speciális problémák megoldása érdekében a felsoroltakon kívül más feladattípusok is szerepelnek tesztjeinkben, ezekkel azonban e tanulmányban nem foglalkozunk.)



1. ábra

### 3. A kombinatív képesség empirikus vizsgálata

Az empirikus vizsgálatból itt csak a 14 éves korosztály eredményeit, abból is csak az alapvető statisztikai adatokat mutatjuk be. Képet adunk azonban az egész vizsgálatról, mivel annak rendszerében helyezük el a közölt eredményeket. Elsőként a tesztek vázlatát és felépítését ismertetjük, majd a mérési eredményeket értékeljük.

A kombinatív képesség vizsgálatához a teszteket három különböző szinten készítettük el: manipulatív, szenzoros, illetve formális szinten. Mindhárom szinthez matematikailag teljesen ekvivalens feladatok tartoznak, csupán tartalmuk különböző. Egy feladat három mennyiséggel jellemezhető: a kiinduló elemek, az elkészítendő konstrukciók elemeinek számával (a konstrukciók „hosszával”), valamint a lehetséges konstrukciók számával. A nyolc feladattípus mindegyikére több (3–6) feladatot készítettünk. Ezek számszerű jellemzőit úgy határoztuk meg, hogy minden típusból szerepeljen a lehető legegyszerűbb feladat, a feladatok a kb. 25 konstrukció előállításáig terjedő



intervallumot egyenletesen lefedjük, valamint hogy a lehető legtöbb konkrét kérdés megválaszolására adjanak lehetőséget. Vizsgálatunk céljaiból következik, hogy a feladatokban a feltételeknek megfelelő konstrukciók megalkotását, az összes lehetséges konstrukció felsorolását kértük.

Az ismertetett megfontolások alapján elkészített feladatrendszert az 1. és 2. táblázatban mutatjuk be. A táblázatokból kiderül, hogy mindegyik kombinatorikai feladattípushoz több feladat, lényegében egy szubteszt tartozik. A feladatokat kisbetűkkel jelöltük, a továbbiakban ezekkel fogunk rájuk hivatkozni. A kiinduló elemek összességét (az ismétléses permutációk esetét kivéve) halmazoknak tekintjük. A Descartes-féle szorzatok képzése során két vagy több, a többi feladatnál egy halmaz a kiindulás. A halmazok elemeit nyomtatott nagybetűkkel jelöljük, a Descartes-féle szorzatok képzésénél ezen túl még számokat és jeleket (+ és -) is használunk. Ugyanezeket a jeleket és betűket alkalmazzuk a formális szint feladataira is. A táblázatokban feltüntetjük a feladatok megoldását, a konstrukciók felsorolását is. Ez a felsorolás egyben az a produktum, amelyet a tanulóktól a formális szint tesztszeiben elvárhatunk.

Az első és második táblázatban feltüntetett feladatokra a három szinten elkészített tesztek csak röviden, egy-egy példára hivatkozva mutatjuk be.

1. táblázat. A „VARIÁLÁS” teszt feladatai

A feladat		A kiinduló elemek		A konstrukciók		
neve	jele	száma	jele	hossza	száma	felsorolása
Descartes-féle szorzatok képzése	a	2+2	{A, B} {1, 2}	2	4	A1, A2, B1, B2
	b	3+2	{A, B, C} {1, 2}	2	6	A1, A2, B1, B2, C1, C2
	c	4+3	{A, B, C, D} {1, 2, 3}	2	12	A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3, D1, D2, D3
	d	2+2+2	{A, B} {+, -} {1, 2}	3	8	A+1, A+2, A-1, A-2, B+1, B+2, B-1, B-2
	e	6+2	{A, B, C, D, E, F} {1, 2}	2	12	A1, A2, B1, B2, C1, C2, D1, D2, E1, E2, F1, F2
	f	2+2+ +2+2	{A, B} {+, -} {1, 2} {X, Y}	4	16	A+1X, A+1Y, A+2X, A+2Y, A-1X, A-1Y, A-2X, A-2Y, B+1X, B+1Y, B+2X, B+2Y, B-1X, B-1Y, B-2X, B-2Y
Ismétléses variációk képzése	g	2	{A, B}	2	4	AA, AB, BA, BB
	h	2	{A, B}	3	8	AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB
	i	3	{A, B, C}	2	9	AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC
	j	4	{A, B, C, D}	2	16	AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD
	k	2	{A, B}	4	16	AAAA, AAAB, AABA, AABB, ABAA, ABAB, ABBA, ABBB, BAAA, BAAB, BABA, BABB, BBAA, BBAB, BBBA, BBBB

1. táblázat folytatása

A feladat		A kiinduló elemek		A konstrukciók		
neve	jele	száma	jele	hossza	száma	felsorolása
Ismétlés nélküli variációk képzése	l	3	{A, B, C}	2	6	AB, AC, BA, BC, CA, CB
	m	3	{A, B, C}	3	6	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
	n	4	{A, B, C, D}	2	12	AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC
	o	5	{A, B, C, D, E}	2	20	AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED
Az összes ismétlés nélküli variáció képzése	p	2	{A, B}	1,2	6	A, B, AA, AB, BA, BB
	q	3	{A, B, C}	1,2	12	A, B, C, AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC
	r	2	{A, B}	1,2 3	14	A, B, AA, AB, BA, BB, AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB
	s	4	{A, B, C, D}	1,2	20	A, B, C, D, AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD

2. táblázat. A „KOMBINÁLÁS” teszt feladatai

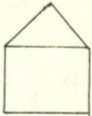
A feladat		A kiinduló elemek		A konstrukciók		
neve	jele	száma	jele	hossza	száma	felsorolása
Ismétléses kombinációk képzése	a	2	{A, B}	2	3	AA, AB, BB
	b	2	{A, B}	3	4	AAA, AAB, ABB, BBB
	c	2	{A, B}	4	5	AAAA, AAAB, AABB, ABBB, BBBB
	d	3	{A, B, C}	2	6	AA, AB, AC, BB, BC, CC
	e	3	{A, B, C}	3	10	AAA, AAB, AAC, ABB, ABC, ACC, BBB, BBC, BCC, CCC
	f	4	{A, B, C, D}	2	10	AA, AB, AC, AD, BB, BC, BD, CC, CD, DD
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	g	3	{A, B, C}	2	3	AB, AC, BC
	h	4	{A, B, C, D}	2	6	AB, AC, AD, BC, BD, CD
	i	5	{A, B, C, D, E}	2	10	AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE
	j	5	{A, B, C, D, E}	3	10	ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE
	k	6	{A, B, C, D, E, F}	4	15	ABCD, ABCE, ABCF, ABDE, ABDF, ABFE, ACDE, ACDF, ACEF, ADEF, BCDE, BCDF, BCEF, BDEF, CDEF

A feladat		A kiinduló elemek		A konstrukciók		
neve	jele	száma	jele	hossza	száma	felsorolása
Ismétléses permutációk képzése	l	3	A, B, B	3	3	ABB, BAB, BBA
	m	4	A, A, B, B	4	6	AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA
	n	4	A, A, B, C	4	12	AABC, AACB, ABAC, ACAB, ABCA, ACBA, BAAC, CAAB, BACA, CABA, BCAA, CBAA
	o	5	A, A, B, B, B	5	10	AABBB, ABABB, ABBAB, ABBBA, BAABB, BABAB, BABBA, BBAAB, BBABA, BBBAA
Részhalmazok képzése	p	2	{A, B}	1, 2	3	A, B, AB
	q	3	{A, B, C}	1,2,3	7	A, B, C, AB, AC, BC, ABC
	r	4	{A, B, C, D}	1,2 3,4	15	A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD, ABCD

A *manipulatív* feladatokban a tanulók kis színes pálcikákkal, illetve a Descartes-féle szorzatok képzésekor ezenkívül még színes kartonlapokkal dolgoztak. Példaként a „VARIÁLÁS” teszt b és a „KOMBINÁLÁS” teszt h feladatát mutatjuk be. (L. 2. és 3. ábra)

„VARIÁLÁS” b feladat (manipulatív)

Rakd ki az ábrán látható összeállítást az *összes különböző módon*, ha a *NARANCS*, a *BARNA* és a *FEHÉR* színű háromszögeket és a *SÁRGA* és a *ZÖLD* négyzeteket használhatod fel!

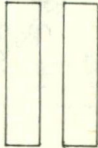


2. ábra

„KOMBINÁLÁS” h feladat (manipulatív)

Rakd ki az *összes lehetséges különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ* összeállítást, ha egy összeállításnak *csupa különböző színű pálcikából* kell állnia, és a pálcikák sorrendje *nem számít!*

Felhasználható pálcikák: *PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD*



3. ábra

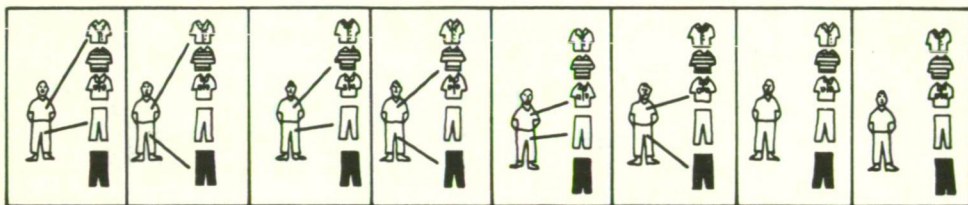
A tanulók írásban kapták meg a feladatokat, mellékelve a szükséges eszközöket. Ezután önállóan dolgoztak, majd miután egy feladattal elkészültek, a jelenlevő pedagógus feljegyezte az általuk elkészített konstrukciókat.

A szenzoros szint feladatait a tanulók nyomtatott teszteken oldották meg.

Itt már nem valódi tárgyak tényleges összeállításáról volt szó, hanem csupán tárgyak képein jelölték a konstrukciókat. A 4. és az 5. ábrán példaként a „VARIÁLÁS” teszt b és a „KOMBINÁLÁS” teszt i feladatát mutatjuk be, feltüntetve a megoldást is. (Az i feladattal megegyező ábrát használunk a j feladatban is, csak az utóbbiban nem 2, hanem 3 gyümölcsöt kell bekarikázni.)

„VARIÁLÁS” b feladat

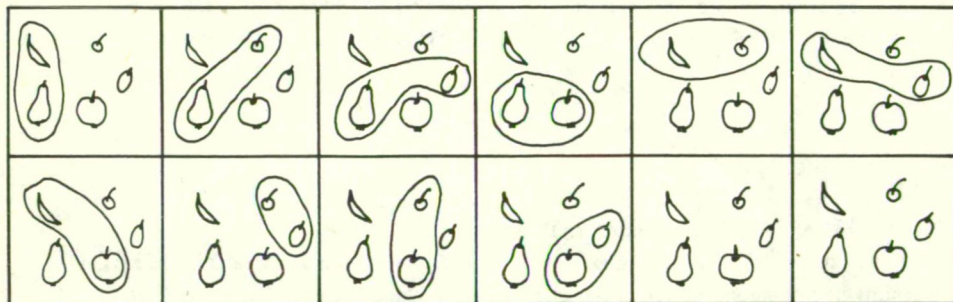
b) Öltöztess fel az ábrán látható fiút a lehetséges összes különböző módon, ha háromféle inget és kétféle nadrágot használhatsz fel!



4. ábra

„KOMBINÁLÁS” i feladat

i) Karikázz be KÉT gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon! Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!



5. ábra

A formális szint feladatait a feladatrendszer bemutatása kapcsán már jellemeztük, csupán a feladatok megfogalmazásának illusztrálásaként idézzük a „VARIÁLÁS” teszt b feladatát: „Sorold fel az összes különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B vagy a C betűt, a második helyre pedig az 1 vagy a 2 számjegyet teheted!”

A képességek vizsgálatát a 14 évesek korosztályánál 1980-ban februártól májusig végeztük Csongrád megye 13 iskolájának, a reprezentativitás szempontjai szerint kiválasztott 600 tanulóival.

A vizsgálat e szakaszában a rendszerezési, a logikai és a kombinatív képesség méréseit végeztük el. A résztvevő tanulók számára heti egy-két alkalommal kiscsoportos foglalkozásokat szerveztünk, ahol egy-egy pedagógus felügyelete mellett önállóan oldották meg tesztjeinket. A három képesség teljes tesztrendszerének megoldása összesen körülbelül 22–24 órát vett igénybe. Az így kapott megoldások hatalmas adattömege a művelési képességek struktúrájának, kapcsolatrendszerének alapos, részletekbe menő feltárását teszi lehetővé.

Az itt bemutatandó statisztikai jellemzők a kb. 550 tanuló által megoldott  $3 \times 37 = 111$  feladaton, azaz összesen kb. 60 ezer megoldáson alapulnak, ez pedig több mint fél millió konstrukció megalkotását és felsorolását igényelte.

Az adatok feldolgozása során az egyes feladatok minden konstrukciójához egy kódszámot rendelünk. E kódszámok sorának számítógépre vitelével módunk van annak nyilvántartására, hogy az egyes tanulók milyen konstrukciókat milyen sorrendben soroltak fel, és így ezen adatok elemzésével lényegében a gondolkodás folyamataira következtethetünk vissza. Az elemzésnek ez a formája jelenleg folyamatban van. Ezen túl azonban szükség van a feladatok teljesítményeinek tömörebb, mennyiségi jellemzésére is.

Az egyik adat, amivel a művelési képesség kialakultságát jellemezhetjük, azon tanulóknak az aránya, akik a feladatot hibátlanul oldották meg. Hibátlan megoldáson azt értjük, hogy a tanuló éppen a szükséges konstrukciókat sorolta fel, nem kevesebbet, és nem is ismételt meg többször azonosat. Szükség van azonban azoknak a feladatmegoldásoknak a jellemzésére is, amelyek nem tökéletesek ugyan, mivel nem sorolták fel az összes konstrukcióit, illetve tartalmaznak felesleges konstrukciókat is. Ezért definiáltunk egy mennyiséget a megoldások jóságának jellemzésére, amely a jó konstrukciók számának ( $x$ ) és a felesleges, ismétlődő konstrukciók számának ( $y$ ) a függvénye. A megoldás jósága:

$$J = \frac{x \cdot (T - y)}{T^2}$$

A képletben  $T$  a teljes megoldáshoz tartozó, vagyis az összes lehetséges konstrukció száma ( $T = x_{\max}$ ). Ha a feladat megoldása hibátlan, akkor  $J = 1$ , ez esetben  $x = T$  és  $y = 0$ . Ha a feladat megoldása hibás, akkor minden hiányzó jó, illetve minden felesleges, ismétlődő konstrukció arányosan csökkenti  $J$  értékét. ( $y = T$  esetén  $J = 0$ . Ugyancsak nulla értékűnek tekintettük a néhány esetben előforduló  $y > T$  jellegű megoldásokat.)

Az ismertetett megfontolásokra épített fontosabb statisztikai jellemzőket a „VARIÁLÁS” teszt-re a 3., a „KOMBINÁLÁS” teszt-re a 4. táblázatban mutatjuk be. A táblázatok egymás melletti tömbökben tartalmazzák a manipulatív, a szenzoros és a formális szint statisztikai jellemzőit. A statisztikai adatok első oszlopai a jó konstrukciók számának átlagát ( $\bar{x}$ ), a második oszlopok ugyanezen mennyiség relatív szórását tartalmazzák. ( $\bar{x}$ -et  $T$ -vel összehasonlítva látjuk, hogy a jó konstrukciók átlagos száma mennyire közelíti meg a lehetséges maximumot. A harmadik oszlopokban a  $\bar{J} \cdot T$  ( $\bar{J}$  átlaga  $T$ -vel szorozva) mennyiséget tüntettük fel, ez ugyanis ( $\bar{x}$ -el összehasonlítható. Az eltérés mértéke az ismétlődő, felesleges konstrukciók arányát jellemzi. Mivel  $T$  a feladat súlyának is tekinthető, a szubtesztek, tesztek mennyiségi jellemzőit is a  $J \cdot T$  mennyiségekből alakítottuk ki.

A negyedik oszlop  $\bar{J}$  százszorosát mutatja, vagyis a feladat jóságát százalékban kifejezve. Ez az egyes feladatok egymással összehasonlítható jellemzésére alkalmas.

Az ötödik oszlopok  $J$  relatív szórását ( $CV_J$  %) mutatják, mely egyben természetesen a  $J \cdot T$ -nek is, illetve a  $100 J$ -nek is relatív szórása. Végül a 6. oszlopban mindenütt azoknak a tanulóknak az arányát tüntettük fel százalékban, akik az adott feladatot hibátlanul oldották meg (akiknél tehát  $J = 1$ ).

#### 4. Az eredmények értékelése

E rövid terjedelemben nem vállalkozhatunk arra, hogy a táblázatok által tükrözött összefüggésrendszert részletekbe menően elemezzük. Az itt következő rövid megjegyzéseinkben csak néhány tendenciára hívjuk fel a figyelmet, illetve szempontokat adunk a táblázatok további elemzéséhez. Először a



3. táblázat. A 14 éves tanulók teljesítményei a „VARIÁLÁS” teszteken (546 tanuló)

A feladat jele	T $x_{max}$	A teljesítmények jellemzői																	
		Manipulatív						Hibátlan megold. aránya	Szenzoros						Formális				
		Jó konstrukciók		A megoldás minősége					Jó konstrukciók	A megoldás minősége				Hibátlan megold. aránya	Jó konstrukciók		A megoldás minősége		
		$\bar{x}$	CV <sub>x</sub> %	$\bar{j} \cdot T$	100 $\bar{j}$	CV <sub>J</sub> %	J=1 %	$\bar{x}$	CV <sub>x</sub> %	$\bar{j} \cdot T$	100 $\bar{j}$	CV <sub>J</sub> %	J=1 %	$\bar{x}$	CV <sub>x</sub> %	$\bar{j} \cdot T$	100 $\bar{j}$	CV <sub>J</sub> %	J=1 %
a	4	3,66	25	3,64	91	26	83,6	3,54	31	3,34	83	37	72,9	2,90	61	2,87	72	62	70,1
b	6	5,56	21	5,54	92	22	82,2	5,20	32	4,93	82	37	66,3	4,30	62	4,27	71	63	69,5
c	12	10,84	21	10,74	89	22	67,6	10,15	33	9,58	80	39	58,4	8,10	65	8,10	67	66	58,4
d	8	6,80	30	6,70	84	32	63,6	5,65	45	5,35	66	49	37,1	5,37	67	5,34	67	67	60,3
e	12	10,88	21	10,71	89	24	65,1	10,36	32	9,87	82	36	62,9	9,10	53	9,06	75	54	67,2
f	16	11,58	41	11,33	70	43	36,6	10,02	51	9,33	58	55	16,9	9,65	73	9,51	59	73	43,7
g	4	3,87	14	3,84	96	16	89,9	3,47	33	3,32	83	40	76,6	3,52	27	3,51	87	28	74,1
h	8	7,17	17	7,10	88	19	58,6	6,16	40	5,91	73	44	44,6	5,40	45	5,37	66	46	27,1
i	9	8,33	17	8,24	92	17	74,4	7,41	36	7,07	79	41	58,0	6,74	47	6,69	75	47	52,2
j	16	14,13	20	13,98	87	21	57,0	12,81	38	12,43	77	41	52,7	11,85	43	11,77	73	43	43,1
k	16	11,23	29	11,04	68	29	9,9	10,18	50	9,78	61	53	15,7	7,75	59	7,71	47	59	6,7
l	6	5,29	23	5,23	87	24	68,9	4,80	36	4,61	77	40	55,1	4,58	41	4,55	76	42	55,4
m	6	5,32	24	5,23	87	26	69,5	4,81	38	4,55	76	43	53,8	4,66	41	4,62	77	42	56,5
n	12	10,53	22	10,40	86	23	61,0	9,63	36	9,27	77	40	51,6	8,58	47	8,48	70	48	44,6
o	20	16,95	24	16,88	83	27	48,2	15,61	39	15,17	75	42	45,9	14,00	48	13,92	69	48	40,3
p	6	4,40	31	4,35	73	32	32,6	3,38	43	2,95	50	57	7,9	3,31	45	3,25	55	47	11,5
q	12	8,85	29	8,73	71	31	24,7	7,17	39	6,52	53	47	5,4	6,26	54	6,19	50	55	6,9
r	14	8,60	39	8,47	61	41	11,5	6,54	46	5,98	43	53	1,8	5,76	55	5,72	41	56	2,4
s	20	14,71	27	14,49	72	29	19,2	13,10	35	12,15	60	42	5,8	10,70	54	10,62	52	55	6,6

4. táblázat. A 14 éves tanulók teljesítményei a „KOMBINÁLÁS” teszteken (541 tanuló)

A feladat jele	T x <sub>max</sub>	A teljesítmények jellemzői																	
		Manipulatív						Szenzoros						Formális					
		Jó konstrukciók		A megoldás minősége		Hibátlan megold. aránya		Jó konstrukciók		A megoldás minősége		Hibátlan megold. aránya		Jó konstrukciók		A megoldás minősége		Hibátlan megold. aránya	
		$\bar{x}$	CV <sub>x</sub> %	$\bar{j} \cdot T$	100 $\bar{j}$	CV <sub>J</sub> %	J=1 %	$\bar{x}$	CV <sub>x</sub> %	$\bar{j} \cdot T$	100 $\bar{j}$	CV <sub>J</sub> %	J=1 %	$\bar{x}$	CV <sub>x</sub> %	$\bar{j} \cdot T$	100 $\bar{j}$	CV <sub>J</sub> %	J=1 %
a	3	2,90	14	2,29	78	27	37,0	2,64	30	1,18	39	114	29,1	2,70	29	2,10	71	38	28,8
b	4	3,61	23	2,39	59	52	29,7	3,27	40	2,35	59	60	35,0	3,24	40	1,57	39	97	19,1
c	5	4,01	31	2,40	48	75	22,7	3,84	42	2,52	49	78	30,0	3,55	51	1,65	33	130	17,6
d	6	5,26	22	4,25	70	41	42,5	4,95	32	3,84	64	50	31,4	4,94	37	3,53	58	54	28,7
e	10	7,09	35	5,88	58	49	12,3	7,53	34	6,50	65	42	11,7	6,19	59	4,27	43	77	7,8
f	10	8,47	21	7,21	72	38	34,1	8,36	26	7,24	72	37	24,5	7,76	41	5,69	57	58	22,9
g	3	2,88	14	1,56	52	91	46,2	2,88	18	2,64	88	35	85,1	2,46	46	1,24	41	112	35,3
h	6	5,12	26	4,25	70	46	45,1	5,44	23	5,23	87	28	70,2	5,03	36	2,60	43	98	27,6
i	10	8,20	25	7,26	72	40	37,9	8,43	26	7,91	79	31	35,4	7,97	39	5,01	50	72	25,0
j	10	6,50	35	5,29	52	53	10,7	6,73	37	6,17	61	42	6,8	5,80	53	3,60	36	80	6,0
k	15	7,72	47	6,26	41	60	1,7	7,77	48	7,01	46	52	2,4	5,40	70	4,22	28	75	1,0
l	3	2,68	28	2,67	89	28	78,7	2,58	35	2,45	82	41	72,0	2,55	35	2,54	85	36	74,3
m	6	5,05	27	5,00	83	28	56,2	4,53	42	4,34	73	46	44,8	4,47	38	4,45	74	38	40,3
n	12	8,34	37	8,17	67	38	16,8	7,24	52	6,89	57	54	13,8	6,22	57	6,20	51	57	8,8
o	10	6,96	36	6,81	68	37	14,8	6,27	49	5,92	59	52	13,8	5,61	51	5,59	56	51	8,4
p	3	1,82	56	1,58	51	67	32,4	2,62	34	2,53	84	37	76,9	1,68	58	1,36	44	71	18,2
q	7	3,25	86	2,73	38	106	24,8	5,68	33	5,48	79	38	44,0	3,40	71	2,28	33	111	13,0
r	15	5,92	99	5,27	34	112	6,8	10,23	38	9,72	65	43	14,3	5,58	90	4,45	29	101	4,0

kombinatív képesség struktúrájának feltárására irányuló munkánk illusztrálásaként olyan összefüggéseket emelünk ki, amelyek már a bemutatott egyszerű statisztikai adatok által is sejtetik a kombinatív műveletek rendszerének felépítését, és lehetővé teszik néhány hipotézis megfogalmazását. Majd a 14 éves korra elért fejlődési szint alapján az iskolai fejlesztés lehetőségeit, feladatait elemizzük.

A „VARIÁLÁS” teszteken elért teljesítmények általában magasabbak a „KOMBINÁLÁS” tesztek teljesítményeinél. Kivételt képez az ismétléses permutációk feladatcsoportja, amely mind a jó konstrukciók magas számával, mind pedig az ismétlődő konstrukciók alacsony számával „kilóg” a „KOMBINÁLÁS” teszt többi feladata közül. Ez az ismétléses permutációknak a „VARIÁLÁS” feladataival való közelebbi rokonságára utal.

Úgy tűnik, hogy a „KOMBINÁLÁS” teszt másik három feladatcsoportja, amelyeket „a konstrukciók elemeinek sorrendje nem számít” tulajdonság kapcsol össze, szorosabban összetartozik. Némileg módosítja a képet a szenzoros szint, ahol az ismétlés nélküli kombinációk teljesítményei magasabbak, mint az ismétléses permutációkéi. És ha a „KOMBINÁLÁS” o feladatát, melyben lényegében két, illetve három betű helyét kell kombinálnunk egy öt betűs konstrukcióban, összehasonlítjuk az i és a j feladatokkal, ahol ugyanezeket a kombinációkat kell képezni, azt látjuk, hogy az o feladat teljesítményei mindhárom szinten az i és a j feladatok teljesítményei közé esnek.

Míndez arra utal, hogy az ismétléses permutációk műveleteinek a műveletek rendszerében elfoglalt helyét csak további elemzésekkel határozhatjuk meg.

A „VARIÁLÁS” és a „KOMBINÁLÁS” feladatait összevetve (az említett kivétellel) azt tapasztaljuk, hogy a „VARIÁLÁS” feladatainál  $\bar{x}$  és  $\bar{J} \cdot T$  között sokkal kisebb a különbség, mint a „KOMBINÁLÁS” feladatainál. Ez arra utal, hogy csak az elemek sorrendjében különböző, ekvivalensnek számító konstrukciók azonosítása okoz nehézséget.

Ami az egyes szinteket illeti, néhány kivételtől eltekintve érvényesül az a tendencia, hogy manipulatív–szenzoros–formális sorrendben csökkennek a teljesítmények. A különbség általában nem túl nagy. E jelenségből arra következtethetünk, hogy a 14 éves tanulóknál a műveletvégzés már jórészt függetlenedik a konkrét tárgyi cselekvéstől.

A „VARIÁLÁS” tesztek feladatai közül a Descartes-féle szorzatok és az ismétléses variációk képzése körülbelül egyforma nehézségűnek bizonyult. Manipulatív és formális szintre érvényes, hogy az összehasonlítható a feladatok teljesítményei alacsonyabbak a g feladatok teljesítményeinél, viszont az f és a k feladatok esetében épp fordított a helyzet. Az ismétlés nélküli variációk, illetve az összes ismétléses variáció képzésénél fokozatosan gyengülő teljesítményeket tapasztalunk.

Ami a „KOMBINÁLÁS” tesztek feladatait illeti, sokkal bonyolultabb kép áll előttünk. Itt már kevésbé érvényesülnek egyértelmű tendenciák. Az ismétléses és az ismétlés nélküli kombinációk képzését összehasonlítva azt tapasztaljuk, hogy a négy egymásnak megfeleltethető feladtpár (a–g, d–h, f–i, e–j) közül az egyszerűbb feladatoknál a teljesítmények nagyjából kiegyenlítettek, illetve talán kissé jobbák az ismétlés nélküli kombinációk esetében. A bonyolultabb feladatoknál (f–i, e–j) viszont minden adat egyértelműen az ismétléses kombinációk magasabb teljesítményeit tükrözi. Érdekes az ismétlés nélküli kombinációk és a részhalmazok képzésének a szenzoros szinten kiugróan magas eredménye, ami ellentétes az általános tendenciákkal. Az okok feltárása itt is további elemzést igényel.



Ezek után vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy egy kombinatív művelet eredményességét a feladat melyik mennyiségi jellemzője befolyásolja leginkább. E kérdést a teljesítmények jellemzői alapján már egyértelműen megválaszolhatjuk: a művelet működését döntő mértékben az határozza meg, hogy hány elemből álló konstrukciókat kell létrehozni. Sőt, ezen túlmenően megfogalmazhatjuk azt a hipotézist is, hogy először a két elemből álló konstrukciók, a párok képzésére alakulnak ki a műveletek, a többelemes konstrukcióra való általánosítás pedig minőségi ugrást, a fejlődés újabb szintjét jelenti. A három- és négyelemű konstrukciókat feltételező feladatoknál – egy kivétellel – a teljesítmények adatai ugrásszerűen csökkennek.

Különösen élesen mutatkozik ez meg a „VARIÁLÁS” d feladatánál, ahol mind az e, mind az f feladat több konstrukciót állít elő, mint a d; az i feladatban, ahol a h-nál eggyel több konstrukciót kell képezni és a kiinduló elemek száma is nagyobb; és ugyanígy feltűnő a különbség a j és a k feladatokat összehasonlítva is. A „KOMBINÁLÁS” teszt d feladatának eredményei ugyancsak sokkal jobbak a b és a c-éinél, az f eredményei az e-nél, az i eredményei a j-nél. A szenzoros szint i és j feladatát külön is érdemes összehasonlítani, ugyanis mindkét feladathoz ugyanazt az ábrát (5. ábrát) használtuk. Az i feladat megoldásával a tanulók elvileg a j feladatot is megoldották – vagyis két gyümölcs bekeretezésével lényegében már kiválasztották a három be nem keretezett gyümölcsöt is –, mégis a j feladatnál a megoldás jósága 79%-ról 61%-ra, a hibátlan megoldások aránya pedig 35,4%-ról 6,8%-ra csökkent.

Az egyetlen kivétel, ahol a 3 elemű konstrukcióknál kismértékű kb. 1%-os javulást tapasztalunk a 2 elemű konstrukciókhoz képest, az a „VARIÁLÁS” l és m feladatpárja (itt is csak manipulatív és formális szinten). A különbséget magyarázhatjuk pusztán véletlennel, az l feladat megoldása során bekövetkezett tanulással, vagy esetleg, mivel az m feladat permutációk képzését jelenti, annak képzésének sajátosságaival.

A megfogalmazott néhány észrevétel az anyagban rejlő további elemzési lehetőségekre vet fényt. A kombinatív műveletek struktúrájának részletes elemzését folyamatban levő számításaink, a megoldásmenetek részletes elemzése, a korrelációs együtthatók kiszámítása, a sokváltozós regresszióanalízis, a faktoranalízis, a clusteranalízis segítségével végezzük el. E számítások nem csupán a kombinatív műveletek belső összefüggéseinek feltárására alkalmasak, hanem a rendszerezési, valamint a logikai műveletekkel való kapcsolat és néhány külső tényező (szociális háttér) hatásainak vizsgálatára is.

Az adatokból kibontakozó helyzetkép értékeléséhez számításba kell vennünk azt a tényt, hogy az általános iskolából kilépő tanulók többsége számára lezárul az általános képzés szakasza, mivel az általános képességek és a gondolkodás műveleti képességeinek fejlesztésére a szakmai képzés keretei az általános iskolánál kevesebb lehetőséget nyújtanak. Így tehát a tanulók egy részénél a kombinatív műveletek rendszere csonka marad.

A „VARIÁLÁS” tesztek feladatainak eredményei azt tükrözik, hogy a megfelelő műveletek párok képzésére kialakultak, a fejlődés a tanulók többségénél lezárult. Erre utalnak a megoldások jóságának magas mutatói. Ezek manipulatív szinten a legmagasabbak, 96% az ismétléses variációk képzésének első feladatánál (g feladat). Ezt követik az i (92%), valamint Descartes-féle szorzatok képzésének b (92%), a (91%), c (89%) és e (89%) feladatai, majd néhány ugyancsak 80% fölötti eredmény. A viszonylag alacsony, 20% körüli variációs koefficiens értékek is arra utalnak, hogy itt már csaknem lezárult a fejlődés.

Manipulatív szinten még viszonylag kicsi a különbség a két és a három elemű konstrukciók képzése között, azonban szenzoros szinten már jelentőssé válik, különösen a hibátlan megoldások arányának tekintetében. A két elemből kiinduló ismétléses variációk esetében (h feladat) például a hibátlan megoldások aránya 44,6%, a Descartes-féle szorzatok képzésének megfelelő feladatnál (d feladat) pedig 37,1%. Ezen a ponton a fejlődés teljessé tétele, a mennyiségi általánosítás valószínűleg kis erőfeszítéssel megoldható lenne.

A három elemű konstrukciók képzése során felmerülő problémák valószínűleg nem csupán a kombinatív képességre jellemzőek, hanem általában a gondolkodásra: a gondolkodás néha megrekedhet a kétváltozós összefüggéseknél. Azoknak a struktúráknak a többsége, amelyekkel az iskolai oktatás során a tanulók szembesülnek, kétdimenziós. Ilyenek a biner relációk, a kétváltozós függvények, a grafikonok, a táblázatok. Még a valójában többdimenziós összefüggéseket is többnyire kétváltozósokra lebontva közelítjük meg. (Így pl. a 3. és 4. táblázatunkban az adathalmazok bemutatását, amelyek lényegében háromdimenziós tömbök, kétdimenziós mátrixok egymás mellé helyezésével oldottuk meg.) Ez természetesen elősegíti a problémák analízisét, ha a lebontás a teljes rendszert magában foglalja, és ha kifejlődnek a részleteknek a sokdimenziós összefüggérendszerbe való visszahelyezésének, összerakásának képességei is. Ezek pedig lényegében nem mások, mint a megfelelő kombinatív műveletek.

Elfogadhatóan jök a teljesítmények a „VARIÁLÁS” tesztek utolsó feladatcsoportjánál, az összes ismétléses variáció képzésénél is.

A „KOMBINÁLÁS” tesztek feladatainak teljesítményszintjei alacsonyabbak az előzőekben tárgyalt feladatok teljesítményeinél. Az  $\bar{x}$  és a megfelelő  $\bar{J} \cdot T$  adatokat összehasonlítva az is kiderül, hogy a különbségek nagy részét a szükségesnél több ismétlődő konstrukció felírása okozza, vagyis az ekvivalencia-kritérium fel nem ismerése. Például a manipulatív tesztek tíz konstrukciót előállító feladatainak  $\bar{x}$  értékeiből közvetlenül is leolvasható, hogy a tanulók az összes különböző konstrukciónak átlagosan 65–80%-át (e: 70,9%, f: 84,7%, i: 82,0%, j: 65,0%, o: 69,6%) elkészítették, és ez nem rosszabb a „VARIÁLÁS” tesztek megfelelő értékeinél. A hibátlan megoldások 25–45%-os aránya viszont sokkal kisebb a „VARIÁLÁS” teszten tapasztaltnál. Mindez arra utal, hogy a tanulók többségénél nem alakulnak ki a kombinációk képzésének speciális műveleti sémái, a konstrukciókat véletlenszerűen, vagy a variációk képzésének analógiájára hozzák létre. A fejlesztésnek tehát itt kiemelkedő jelentősége van, és elsősorban a kombinációk képzésének eltérő vonásaira kell összpontosítani.

A variációs koeficiens magas értékei a „KOMBINÁLÁS” tesztek feladatainál jelzik, hogy itt a teljesítmények erősen széthúzott skálájával van dolgunk. Nem arról van tehát szó, hogy e korosztály tagjai egységesen a fejlődés közepes fokán állnak, hanem rendkívül heterogén fejlettségűek.

Ezzel kapcsolatban utalnunk kell azokra a különbségekre, amelyek Piaget eredményeivel szemben mutatkoztak. Egyik megjegyzésünk az, hogy a műveletek fejlettsége szempontjából a vizsgált korosztály sokkal heterogénebb képet mutat annál, sem hogy a fejlettséget az életkori periódusokkal jellemezhetnénk. Másik észrevételünk az, hogy Piaget csak a párok képzését vizsgálta (például a „KOMBINÁLÁS” teszt d, f, g, h, k, q feladatainak megfelelő eseteket), így ezek alapján sokkal kedvezőbb képet

kapott, mintha a többelemű konstrukciók előállítását is magában foglaló teljes rendszert tanulmányozta volna.

A kombinatív képesség műveleteinek kifejlesztése természetesen akkor lehet optimális, ha az egész általános iskola, sőt már az óvodai korszak is átfogó fejlesztési program alapján történik. Már óvodás korban meg lehet kezdeni a párok képzésének műveleteit fejlesztő játékokat, gyakorlatokat. Az iskolában a fejlesztés nem korlátozódhat a matematika tanítására. A matematikatanítás feladata az, hogy kialakítsa a kombinatív műveleteket, nyomon kövesse és irányítsa fejlődésüket, megtanítsa a mennyiségi általánosításokat, elvezessen a tevékenységek szabályainak felismeréséhez, majd később a matematikai összefüggések megfogalmazásához.

Az egész gondolkodást átható műveleti rendszer azonban csak akkor épül ki, ha minden tantárgyban feltárjuk a bennük rejlő kombinatorikai struktúrákat, és a tantárgy tartalmának megtanítása mellett egyben gondot fordítunk azok fejlesztésére is. Hogy itt pontosan mire gondolunk, azt két példával illusztráljuk.

A „VARIÁLÁS” teszt b feladatában egy három- és egy kétértelmű halmaz Descartes-féle szorzatát kell képezni. A nyelvtanban megjelenik ugyanez a művelet, amikor a személyes névmásokat soroljuk fel. Itt a két összeszorozandó halmaz a szám: [egyes, többes] és a személy: [első, második, harmadik].

A szorzathalmaz megfelelő elemeihez rendeljük a névmásokat: az egyes szám első személy → én stb. E séma alapján soroljuk fel a birtokos (enyém, tied, ...) és a visszaható (engem, téged, ...) névmásokat. Ha az igeragozásra térünk át, ott is e séma működik, de már lehetőségünk van a harmadik dimenzióba való kilépésre, ha bekapcsoljuk az igeidőket is: [múlt, jelen, jövő]. A megfelelő igeragozási esetek felsorolását szinte minden tanuló elsajátítja. Ha az így előálló háromdimenziós tömb „matematikai” természetének tanulmányozására is gondot fordítunk, akkor nem csupán a nyelvtant tanítjuk eredményesebben, hanem a sokat emlegetett gondolkodási képességeket is fejlesztjük. Már néhány egyszerű gyakorlat is sokat segítene, például az említett háromdimenziós tömb többféle „bejárása”. (Például: soroljuk fel az igeragozás megfelelő eseteit a megkezdett sort folytatva: irtam, írok, írni fogok, irtunk, ...) Másik példánkat vegyük az ugyancsak kimeríthetetlen fejlesztési lehetőségeket kínáló természettudományok területéről. Amikor a kémiai reakciók tárgyalása során a halmazállapot szerepéről esik szó, mindjárt kitérhetünk két reagáló anyag halmazállapotok szerinti összes lehetőségének számbavételére. Itt a [szilárd, folyékony, légnemű] halmaz kételemű ismétléses kombinációit kell képeznünk („KOMBINÁLÁS” teszt d feladat), melyek a következők: szilárd–szilárd, szilárd–folyékony, szilárd–gáz, folyékony–folyékony, folyékony–gáz, gáz–gáz. Ha ebből a teljességből emeljük ki a szilárd–szilárd esetet, és elmagyarázzuk, miért nem jön itt közvetlenül létre reakció, már a kémiai probléma alaposabb megértéséhez is adtunk valami többletet.

A műveleti képességek struktúrájának, fejlődési folyamatának feltárására irányuló munkánk első szakaszában az alapvető, általános összefüggések megragadására törekszünk. E munka során számos, további vizsgálódásra érdemes probléma kerül felszínre. A részletek felderítésén túl azonban kutatásunk következő periódusában a fejlesztés lehetőségeinek számbavételét, programjának, eszközrendszerének kidolgozását tűzzük ki célul.

## IRODALOM

- Csapó Benő* (1979): A kombinatív képesség és értékelésének feltételei. Acta Univ. Szeg. de A. J. nom. Sectio Paed. et Psych. Ser. spec. paed. Szeged, 125.
- Guilford, J. P.* (1950): Creativity. Amer. Psychol., vol. 5., 444–54.
- Guilford, J. P.* (1959): Traits of creativity. In: H. H. Anderson (ed) Creativity and its Cultivation, Harper, 142–61.
- Inhelder, B.–Piaget, J.* (1955): De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. PUF, Paris. (A gyermek logikájától az ifjú logikájáig. Akadémiai Kiadó, Budapest 1967).
- Landau, E.* (1971): Die Psychologie der Kreativität. Ernst Reinhardt Verlag, München–Basel. (A kreativitás pszichológiája, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974).
- Mednick, S. A.* (1962): The associative basis of the creative process Psychol. Rev., vol. 69, 220–32.
- Nagy József* (1980): A tudás létezési módjai, megjelenési formái és funkciói. Acta Univ. Szeg. de A. J. nom. Sectio Paed. et Psych. 22. Szeged.
- Piaget, J.–Inhelder, B.* (1951): La genese de l'idée de hasard chez l'enfant. PUF, Paris.
- Piaget, J.* (1971): Structuralisme. Routledge and Kegan Paul, London.
- Piaget, J.* (1972): Psychology and Epistemology. Penguin Books Ltd, Middlesex.
- Poincaré, H.* (1908): Mathematical Creation. In: Vernon, P. (ed): Creativity, Penguin Books Ltd. 1978.
- Rubinstein, Sz. L.* (1964): Az általános pszichológia alapjai. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Türke, W.* (1967): Kombinatorika tanítása az alsó tagozaton. A matematika tanítása, XIV. 3. 65–72.
- Varga Tamás* (1967): Combinatorials and probability for young children. The ISGML, Scherbrooke.