

## A SZIMULTÁN TANULÁS HATÁSA A TUDÁSMENNYISÉG NÖVEKEDÉSÉRE

1. *Bevezetés.* Régi pedagógiai tapasztalat szerint kevésbé fárasztó huzamosabb időn át több tárgyat váltogatva tanulni, mint egyetlen tárggyal foglalkozni. Egy általános, vagy középiskolai tanuló valószínűleg képtelen lenne egy délelőtt végigülni négy egymást követő kémia órát, de viszonylag éberén végigül öt, vagy hat órát, ha a tantárgyak váltogatják egymást. Egy vizsgára készülő orvostanhallgató hat óra anatómia tanulás után esetleg már képtelen ezt a tárgyat tovább tanulni, de még képes két-három órát politikai gazdaságtannal, vagy idegen nyelvvél foglalkozni.

Felmerül az a kérdés, hogy lehetséges-e a tanulás időben lejátszódó folyamatára olyan matematikai modellt alkotni, amely tükrözi a több tárgyat váltogató tanulásnak, röviden a *szimultán tanulásnak* ezt a pihentető és a tanulás intenzitását fokozó hatását. További, az előbbinél gyakorlatiasabb kérdés az, hogy lehetséges-e ilyen matematikai modell alapján kvantitatív becslést adni arra, hogyan változik a tanulás intenzitása szimultán tanulás esetén egyetlen tárgy tanulásának intenzitásához képest.

Ha az előbbi kérdésekre igenlő választ lehet adni, akkor – úgy tűnik – megtettük az első lépést abba az irányba, hogy az iskolai és felsőoktatási tantervvitákban állandó *casus belliként* szereplő tananyagmennyiség megállapítását objektív alapokra helyezzük. Lehetőséggé válik továbbá az, hogy újabb szemszögből hasonlítsuk össze azt az érettségi és felsőoktatási vizsgarendszert, melyben az összes vizsga egy-két egymást követő napra esik, azzal, melyben az egyes tárgyak vizsgái között napok, esetleg hetek telnek el.

Az első szerző egy korábbi dolgozatában, kizárólag elméleti megfontolások alapján az előbbieken felvetett kérdésekre választ adó matematikai modellt javasolt\*. A *Felsőoktatási Pedagógiai Kutatóközpont* felismerve a téma elméleti érdekességét, újszerűségét és gyakorlati jelentőségét, elvállalta az elméleti modell helyességének ellenőrzésére és az abban szereplő paraméterek becslésére irányuló kísérletek finanszírozását. A kísérletek több mint egy éve folynak, és bár további, ellenőrző kísérletekre még jócskán szükség van, megítélésünk szerint az eddig elért eredményekről érdemes a neveléstudomány művelőit tájékoztatnunk.

E dolgozat 2. pontjában röviden ismertetjük a matematikai modellnek azt a speciális esetét, amelynek kísérleti ellenőrzésén dolgoztunk. Az ismertetés során igyekszünk a matematikai formalizmust a szükséges minimumra csökkenteni. A részletek és az alapul

\*Farkas Miklós: A szimultán tanulás dinamikai elmélete. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 1976. 103–114.

szolgáló mélyebb matematikai összefüggések iránt érdeklődő olvasót az idézett dolgozatra utaljuk. A 3. és 4. pontban a lefolytatott kísérletek megszervezését írjuk le és az eredményeket foglaljuk össze.

2. *A szimultán tanulás dinamikai elmélete* (továbbiakban SZITADEL). A SZITADEL matematikailag leírja a tanulás időbeli folyamatát abban az esetben, amikor a diák (iskolai, vagy egyéni tanuló, egyetemi hallgató, valamely továbbképző tanfolyam hallgatója stb.) hosszabb időn át, egyszerre több tantárgyat tanul és idejét egyenlően osztja el a tárgyak között. Nem a tanulás belső, lélektani, szellemi dinamikájával, az emberi agyban lejátszódó folyamatokkal foglalkozik, hanem csupán ezek külső megnyilvánulásával: az elsajátított tananyagmennyiséggel, illetve a tanulás intenzitásának változásával az időben.

Jelöljük  $t$ -vel az időt, amelyet valamely  $t = 0$  időponttól, a tanulmányok megkezdésének időpontjától mérünk. A tanulás a  $t = 0$  időponttal kezdődik és huzamos időn, több hónapon, pl. egy egyetemi féléven, esetleg egy tanéven át folyik. A tanult tárgyak száma legyen  $n \geq 2$ . A tárgyakat 1-től  $n$ -ig megszámozzuk és  $x_k$ -val jelöljük a  $k$ -adik tárgyból megtanult anyagmennyiséget, más szóval a diák *tudásmennyiségét* a  $k$ -adik tantárgyban ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). A tudásmennyiséget a továbbiakban *könyvoldalokban* mérjük (egy könyvoldalon 3200 leütést értve). Az elmélet nem foglalkozik a tudás minőségével, mélységével, azzal, hogy alkalmazni tudja-e a diák a tanultakat stb, de feltételezi, hogy a tanulás mélysége az egész idő alatt állandó. A tudásmennyiséget az idő függvényének tekintjük, és a feladat éppen ezeknek az  $x_k(t)$  függvényeknek a meghatározása ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Szerepeltetjük az  $x_k(t)$  függvények  $y_k(t) = \dot{x}_k(t)$  idő szerinti deriváltjait és ezeket a megfelelő tárgyak tanulási *intenzitásainak* nevezzük. Az  $y_k(t)$  intenzitás, amelyet *könyvoldal per órában* mérünk, azt adja meg, hogy a  $t$  időpillanatban, a  $k$ -adik tárgyban a tudásmennyiség időegység alatt mennyit változik. Ha a diák a  $t$  időpillanatban a  $k$ -adik tárgyat tanulja, akkor  $y_k(t)$  általában pozitív (a tudásmennyiség nő), ha az  $i$ -edik tárgyat nem tanulja, akkor  $y_i(t)$  zérus vagy negatív (felejtés!). A diák természetesen egyszerre csak egy tárgyat tud tanulni, vagyis minden  $t$  időpillanatban az  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  értékek közül elvileg legfeljebb egy lehet pozitív. Gyakorlatilag azonban ezeknek a deriváltaknak hosszabb időintervallumra (egy napra, egy esetleg több hétre) vonatkoztatott átlagértékei szerepelnek, melyek már mind pozitívak lehetnek.

Jelöljük  $b_i$ -vel azt a maximális intenzitást, melyet a diák az  $i$ -edik tárgy tanulásában hosszú időn át ki tud fejteni, feltéve, hogy a többi tárgy tanulásának intenzitása zérus. Ezt a  $b_i$  értéket a diák *terhelhetőségének* nevezzük az  $i$ -edik tárgyban ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). A terhelhetőség értéke a tárgytól és a diák képességeitől, adottságaitól függ. Feltételezzük, hogy ez az érték a tanulás folyamán állandó. A terhelhetőség reciproka  $1/b_i$  az  $i$ -edik tárgy (abszolút) nehézségi foka. Ha a  $k$ -adik tárgy (abszolút) nehézségi fokát elosztjuk az  $i$ -edik tárgy (abszolút) nehézségi fokával, megkapjuk a *k-adik tárgynak az i-edikre vonatkoztatott relatív nehézségi fokát*:  $b_i/b_k$ . Ha az egyik tárgyról a másikra való áttérésnek nem lenne pihentető hatása, akkor – amint ezt könnyű belátni – a  $k$ -adik tárgy egységnyi intenzitású tanulása éppen  $b_i/b_k$ -val csökkentené a diák terhelhetőségét az  $i$ -edik tárgyban.

Figyelembe véve az egyik tárgy tanulásáról a másik tanulására való áttérés pihentető hatását, bevezetjük az  $i$ -edik és  $k$ -adik tárgy  $r_{ik}$  *rokonsági fokát*. Feltételezzük, hogy

$$0 < r_{ik} < 1, \quad r_{ik} = r_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; i \neq k).$$

Minél kisebb két tárgy rokonsági foka, annál üdítőbb az egyik tárgy tanulásáról áttérni a másikra. Ezek után az

$$a_{ik} = r_{ik} \frac{b_i}{b_k}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; i \neq k)$$

számot a  $k$ -adik tárgynak az  $i$ -edikre vonatkozó *relatív disszipációjának* nevezzük. Feltételezzük, hogy a  $k$ -adik tárgy egységnyi intenzitású tanulása  $a_{ik}$ -val csökkenti (elszívja, elemészt, „disszipálja”) a diák terhelhetőségét az  $i$ -edik tárgyban. Bevezetve még az  $a_{ii} = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) jelöléseket, a SZITADEL szerint az  $y_i(t)$  intenzitásfüggvények az

$$\dot{y}_i = b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

differenciálegyenlet rendszert elégítik ki. Ha az intenzitásfüggvényeket ebből a differenciálegyenlet rendszerből meghatároztuk, a tudásmennyiségek egyszerű integrálással adódnak.

Megjegyezzük, hogy ez az ún. szabadon tanuló diák modellje, amin azt értjük, hogy a több héten, vagy hónapon át tartó tanulás során „rendszeres számonkérés”, feleltetés, dolgozatíratás nincs. Ezt az esetet ismertetjük, mivel csak erre nézve folytattunk kísérleteket.

Külön felírjuk, milyen a modell az  $n = 2$  esetben, vagyis akkor, amikor a diák két tárgyat tanul szimultán. Ekkor az intenzitásokra vonatkozó differenciálegyenlet rendszer:

$$\dot{y}_1 = b_1 - y_1 - r \frac{b_1}{b_2} y_2,$$

$$\dot{y}_2 = b_2 - r \frac{b_2}{b_1} y_1 - y_2,$$

ahol  $r = r_{12} = r_{21}$  a két tárgy rokonsági foka. Ennek a rendszernek

$$y_1 = \frac{1}{1+r} b_1, \quad y_2 = \frac{1}{1+r} b_2 \quad (*)$$

aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete, ami magyarul azt jelenti, hogy a két tárgy tanulásának intenzitásai gyakorlatilag az egész tanulási idő alatt a (\*) képletekkel megadott állandó értékek lesznek.

3. *A kísérletek célja és megszervezése.* Az előző pontban röviden vázolt modell valóságtartalmával kapcsolatban számos kérdés merül fel. Az első elméleti jellegű kérdés, amint erről már az idézett dolgozatban is szó van, a következő: helyes-e determinisztikus modellt konstruálni erre a folyamatra, mikor nyilvánvaló az, hogy a tanulást számos

véletlen tényező is befolyásolja, és a tanulás intenzitása valójában sztochasztikus folyamat. Általánosabban felmerül a kérdés, nem túl durva-e a SZITADEL modellje. Ahhoz azonban, hogy ezeket, és az ehhez hasonló kérdéseket érdemben vizsgálhassuk és dönthessünk arról, érdemes-e a SZITADEL-t finomítani, először tisztáznunk kell, hogy mi a valóságtartalma a modellben szereplő paramétereknek, meg lehet-e ezeket elég pontosan határozni. Éppen erre irányultak eddigi kísérleteink.

A kísérletek megtervezésénél az előző pont végén vázolt  $n = 2$  esetre szorítkoztunk. Célul tűztük ki a (\*) képletben szereplő adatok kísérleti meghatározását. Nyilvánvaló, hogy a két tárgy  $r$  rokonsági fokának értéke *a priori* nem becsülhető. Ezt tehát a (\*) képletekből kell meghatározni feltéve, hogy a képletekben szereplő többi adatot ismerjük. A feladat tehát a  $b_1, b_2, \gamma_1, \gamma_2$  intenzitásértékek mérése.  $b_1$ , ill.  $b_2$  az első, ill. a második tárgy tanulásának intenzitása akkor, amikor a diák egyedül az első, ill. a második tárgyat tanulja.  $\gamma_1$ , ill.  $\gamma_2$  pedig az első, ill. a második tárgy tanulásának intenzitása akkor, amikor a diák a két tárgyat szimultán tanulja.

A kísérleteket kisszámú a Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karáról önként jelentkező egyetemi hallgatóval végeztük. Az első szakaszban, 1976 őszén magának a tanulási kísérlet lefolytatásának legjobb, legobjektívebb módszerét kísérleteztük ki. Ekkor 9 kísérleti alannyal és 3 tantárggyal, pontosabban könyvvel dolgoztunk. Ebben a szakaszban a következőket állapítottuk meg.

a) A  $b_k$ , illetve  $\gamma_k$  intenzitásértékekre objektív adatok nyerhetők, ha a kísérleti alanyok 3–4 héten át, heti 2–3 alkalommal, alkalmanként 4 órát, felügyelettel tanulnak egy tárgyat, illetve szimultán. Szimultán tanulás esetén a 4 óra egyik felében az egyik, a másik felében a másik tárggyal foglalkoznak.

b) Lényeges, hogy a tanulás nyugodt körülmények között, mindig a napnak ugyanabban a szakában történjék.

c) Egyetemi hallgató kísérleti alanyok esetében az intenzitás alakulását erősen befolyásolja az, hogy az egyetemi tanulmányokkal kapcsolatos követelmények az egyetemi félév folyamán állandóan növekednek. Emiatt a kísérleti tanulás intenzitása a félév előrehaladtával csökken. Ennek a hatásnak a kiküszöböléséhez a kísérlet megszervezésénél ügyelnünk kell arra, hogy ugyanannyi kísérleti alany tanuljon a félév elején szimultán (és a végén az egyik, majd a másik tárgyat egyedül), mint ahányan a félév végén tanulnak szimultán.

d) A tárgyak kiválasztásánál lényeges, hogy a könyvek szövege minél homogénebb legyen, az anyag minden része új legyen a diáknak, továbbá (mivel a cél az emlékezetbe vésés intenzitásának mérése) az anyag megértése ne okozzon különösebb nehézséget.

e) Biztosítani kell, hogy a megtanulás mélysége ugyanolyan legyen abban a szakaszban, amikor a diák szimultán tanul, mint akkor, amikor egyetlen tárgyat („szóló”).

Ezeknek a tapasztalatoknak birtokában, a második szakaszban, 1977 tavaszán 7 új, önként vállalkozó gépészmérnök hallgatót választottunk ki. Mindnyájan Brósz–Pólay: Római jog (Tankönyvkiadó, 1974) c. tankönyvét (1. tárgy) és Perényi József (szerkesztő): A kelet-európai országok története (ELTE, bölcsészkar) egyetemi jegyzetét (2. tárgy) tanulták. A kísérleti alanyok egy része négyhetenként váltotta a római jog szóló, a történelem szóló, illetve a két tárgy szimultán tanulásának szakaszait. Egy-egy tanulási szakasz végén írásbeli beszámolót írtak a megtanult anyagból a tudás mélységének ellenőrzésére. A tanulási szakaszokat úgy jelöltük ki, hogy egyenlő számú kísérleti alany tanult szimultán az egyetemi félév elején, közepén, illetve végén.

A kísérleti tanulás mintegy négy hónapig tartó második szakasza után egyéni beszélgetéseken alapuló kérdőíveket fektettünk fel a kísérletben résztvevők szubjektív tapasztalatairól.

4. *A kísérleti eredmények értékelése.* Az egyes tanulási szakaszok alatt megtanult oldalszámot átszámítottuk ún. fiktív könyvoldalra, amin 3200 leütést értettünk. Ezt a (fiktív) oldalszámot elosztottuk a tárgy tanulásával töltött órák számával. Szóló tanulás esetén így megkaptuk a szóban forgó tárgy szóló tanulásának intenzitását, mely a

1. táblázat  
Tanulás-intenzitásértékek

Név:	1. tárgy: Római jog		2. tárgy: Történelem	
	$b_1$ : terhelhetőség	$2y_1$ : szimultán eff. intenzitás	$b_2$ : terhelhetőség	$2y_2$ : szimultán eff. intenzitás
1. A	2,4	2,1	2,3	2,2
2. B	1,4	1,9	1,9	2,3
3. C	2,1	2,2	2,8	3,0
4. D	1,5	1,9	1,7	2,2
5. E	1,1	1,8	1,9	2,1
6. F	1,5	2,0	2,6	2,7
7. G	2,2	3,0	2,4	3,8
Átlag	$\bar{b}_1 = 1,7$	$2\bar{y}_1 = 2,1$	$\bar{b}_2 = 2,2$	$2\bar{y}_2 = 2,6$
Szórás	$\sigma(b_1) = 0,5$	$\sigma(2y_1) = 0,4$	$\sigma(b_2) = 0,4$	$\sigma(2y_2) = 0,6$

SZITADEL modell  $b_1$ , ill.  $b_2$  terhelhetőségével egyenlő. Szimultán tanulás esetén ezzel az eljárással a szóban forgó tárgyak szimultán tanulásának *effektív intenzitás*-értékeit kaptuk meg. Ezek az értékek a SZITADEL modell  $y_1$ , ill.  $y_2$  intenzitásainak kétszeresei, ui. az elméleti modellben az egyik tárgy tanulási intenzitásának kiszámításánál a megtanult oldalszámot a teljes tanulásra fordított idővel osztjuk, melyben benne van a másik tárgy tanulására fordított idő is.

Az ily módon nyert értékeket az 1. táblázat tartalmazza (a kísérleti alanyokat az ábécé nagy betűivel jelöljük). *A kísérleti eredmények meggyőzően alátámasztják a SZITADEL modell helyességét.* Ha az átlagokat nézzük, a Római jogban a terhelhetőség (a szóló tanulás intenzitása)  $\bar{b}_1 = 1,7$  oldal/óra. Ez az intenzitás szimultán tanulás esetén megnő, a Római jog tanulásának effektív intenzitása szimultán tanulás esetén  $2\bar{y}_1 = 2,1$  oldal/óra. Hasonlóan a Történelemben a terhelhetőség  $\bar{b}_2 = 2,2$  oldal/óra, szimultán tanulás esetén az effektív intenzitás  $2\bar{y}_2 = 2,6$  oldal/óra. *A szimultán tanulás ezek szerint a két tárgy tanulásának intenzitását 23%-kal, ill. 18%-kal növeli.*

Ha az egyes kísérleti alanyokat nézzük, azt találjuk, hogy 7-ből 6 esetben az elmélet igazolódik. A, akinél az elméletnek ellentmondó értékeket kaptunk, a félév első harmadában Római jogot, a második harmadában Történelmet tanult és az utolsó harmadban tanult szimultán. Egyrészt ez magyarázza nála az elmélettől és a többiektől eltérő eredményt. Másrészt azonban ő volt az egyetlen, aki a személyes értékelő beszélgetés során azt mondta, hogy számára a szimultán tanulás ugyanolyan fárasztó volt, mint egyetlen tárggyal foglalkozni 4 órán át.

Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy a Római jognak a Történelemre (pontosabban a megfelelő tankönyveknek egymásra) vonatkoztatott nehézségi foka átlagosan  $\bar{b}_2/\bar{b}_1 = 2,2/1,7 = 1,3$ , vagyis a Római jog „1,3-szer olyan nehéz tantárgy” (legalábbis a mi gépészmérnök hallgatóinknak) mint a Történelem.

Az 1. táblázatban szereplő adatok lehetővé teszik a két tantárgy  $r$  rokonsági fokának meghatározását. Erre a célra a (\*) formulákat használjuk fel. Az elmélet azzal az egyszerűsítő szimmetria-feltevessel dolgozik, hogy az első tárgy másodikra vonatkozó

2. táblázat  
A Római jog és a Történelem rokonsági foka

Név:	$b_1$	$y_1$	$b_2$	$y_2$	$r$	$\Delta r$
1. <i>A</i>	2,4	1,0	2,3	1,1	1,2	0,2
2. <i>B</i>	1,4	1,0	1,9	1,2	0,5	-0,2
3. <i>C</i>	2,1	1,1	2,8	1,5	0,9	0,1
4. <i>D</i>	1,5	1,0	1,7	1,1	0,6	0,1
5. <i>E</i>	1,1	0,9	1,9	1,1	0,5	-0,6
6. <i>F</i>	1,5	1,0	2,6	1,4	0,7	-0,5
7. <i>G</i>	2,2	1,5	2,4	1,9	0,4	0,2
Átlag (1. és 7. nélkül)	$\bar{b}_1 = 1,5$	$\bar{y}_1 = 1,0$	$\bar{b}_2 = 2,2$	$\bar{y}_2 = 1,3$	$\bar{r} = 0,6$	
Szórás (1. és 7. nélkül)	$\sigma(\bar{b}_1) = 0,3$	$\sigma(\bar{y}_1) = 0,1$	$\sigma(\bar{b}_2) = 0,4$	$\sigma(\bar{y}_2) = 0,2$	$\sigma(\bar{r}) = 0,2$	

rokonsági foka egyenlő a másodiknak az elsőre vonatkozó rokonsági fokával. A valószínűségben azonban nem várhatjuk, hogy az első egyenlet ugyanazt az  $r$  értéket szolgáltatja mint a második. A 2. táblázatban feltüntettük a  $b_1, y_1, b_2, y_2$  értékeket továbbá  $r$ -et, amelynek értékét az első, ill. a második egyenletből nyert  $r$  értékek számtani közepének vettük. Feltüntettük továbbá  $\Delta r$ -et, ami az első, ill. a második egyenletből nyert  $r$  értékek különbsége. Az elmélet szerint  $0 < r < 1$ . *A* esetében a mért adatokból számított  $r$  értékre nem teljesül ez az egyenlőtlenség, ezért az ő adatai a rokonsági fok számításánál nem vehetők figyelembe. Mivel *A* adatait mellőztük, el kellett hagynunk *G* adatait is. *G* volt ugyanis *A* kiegyensúlyozó párja. Ti. amíg *A* a félév utolsó harmadában, addig *G* a félév első harmadában tanult szimultán. A 2. táblázatban tehát a ' -vel jelölt átlagértékek a *B-F* kísérleti alanyokra vonatkoznak.

Figyelemre méltó, hogy mind az 1., mind pedig a 2. táblázatban az adatok kis száma ellenére (mely statisztikai törvényszerűségek érvényesülését kizárja) az átlagok körüli szórások a megengedhető határon belül vannak; sehol sem nagyobb a szórás 33%-nál.

A további és az ellenőrző kísérleteket folytatjuk egyelőre az eddigiekhez hasonló „steril laboratóriumi” keretek között. Ha azonban ily módon sikerül elegendő adatot összegyűjtenünk, a gyakorlati következtetések levonása előtt valószínűleg szükség lesz önként vállalkozó diákok nagyobb tömegeivel folytatott kísérletekre is.