

A MATEMATIKA ALKALMAZÁSÁNAK EGYIK LEHETSÉGES  
ÚTJA A NEVELÉSTUDOMÁNYI KUTATÓMUNKÁBAN

A matematika és a pedagógia nem tekinthetők rokon tudományoknak, kutatásuk tárgya, törvényszerűségeik jellege erősen eltér egymástól. Kapcsolatukat az teszi indokolttá, hogy a matematika módszer és eszköztudománya új, hatékony segítséget kínál a pedagógiai jelenségek és a bennük rejlő lényeg feltárásához.

A matematika ma már minden tudományágban tért hódított. Ismeretelméleti aspektusból ez azt jelenti, hogy „ténnyé vált a tudás matematizálása és formalizálása, ami azzal a törekvéssel telített, hogy véglegesen leszámoljanak a tudásban levő intuitív mozzanattal. Egyidejűleg azonban egy másik törekvés is jelentkezik: felhasználni ezt az intuitív mozzanatot, mint új elméleti struktúrák létrehozásának alapvető eszközét.”<sup>1</sup> Ezek a tendenciák a pedagógiai megismerés folyamatában is jelentkeznek.

A matematikai módszerek pedagógiai alkalmazását nemcsak az nehezíti, hogy sajátosan különböző logikai rendszert képviselnek, más törvényszerűségekre támaszkodnak és eltérő a közvetítő közegük. Legtöbbször az a banális körülmény akadályozza meg az együttműködést, hogy a neveléstudomány kutatója nem ért a matematikához. Ez a cikk lényegében azért íródott, hogy bemutassuk az objektív és szubjektív természetű nehézségek legyőzésének általunk már megjárt útját.

A korszerű kutatómunka egyik lehetséges kerete a funkciómegosztáson alapuló „team”, azaz munkaközösség, amelyben az egyes elméleti vagy gyakorlati területeket különböző tudományágak szakemberei képviselik. Például a számítástechnika pedagógiai alkalmazásához szükséges elemi munkaközösség három tagból: pedagógusból, matematikusból és programozó szakemberből áll.

A team ökonomikus érdekből jön létre, ugyanis nem gazdaságos mindhárom ágazatot egyenlő intenzitással megtanulni, mivel azonos szinten művelni, lépést tartva az érintett tudományok fejlődésével emberileg amúgyis lehetetlen. A tudományos objektivitást egyébként is jobban biztosítja a különböző szakemberek különböző szempontrendszerre.

A matematika és a neveléstudomány eltérő szimbólumrendszert, más jellegű kifejező eszközöket használ. Látszatra nincs bennük semmi közös. A valóság azonban — és ez alól a pedagógia gyakorlata és elmélete sem képez kivételt — mennyiségileg és minőségileg meghatározott struktúrákba rendeződik. A matematizálás alapfeltétele a valóságos és feltételezett (hipotetikus) struktúrák világos, ellentmondásmentes elméleti felépítése. Mivel a matematika eleve ilyen struktúrákkal dolgozik, az a fontos, hogy a pedagógia belső logikájának megfelelő, egy matematikai struktúrára leképezhető rendszert hozzunk létre.

<sup>1</sup> P. Kopnyin: Dialektika—logika—tudomány. Bp. 1974. 7.

A kétféle logikai rendszer közötti egyezés és különbözőség problémakörével az erkölcsi tudatosság és rendszer gyakorlati vizsgálatában találkoztunk először. A vizsgálat alapvető célja az volt, hogy a moralitás fejlődésére irányuló történeti elemzéssel és a jelen valóságának kísérleti etikaoktatás keretében történő alakításával párhuzamosan megbízható adatokat nyerjünk a gimnazisták erkölcsi tudatosságára és arra a morális rendszerre, melyre a tanulók tudatossága vonatkozik. A rendszer ebben az értelmezésben megfelelően strukturált tartalmat jelent.

A strukturáltság a felmérő tesztlap megfogalmazás elé azt a követelményt állította, hogy a morális tudat keresztmetszetét megfelelő logikai rendben verbális rendszer segítségével úgy ábrázolja, hogy a matematikai formulák alkalmazása, a matematikai jelrendszerre történő áttérés minél zökkenőmentesebb, egyértelműbb legyen.

*Ilyen jellegű struktúrák összeállítását alapos, részletekbe menő tartalmi elemzéssel lehet csak előkészíteni, melynek folyamán nemcsak az alapvető, hanem a részösszefüggések is tisztázódnak és lehetővé teszik a felméréndő tartalom operacionalizálását.* Ez adott esetben azt jelentette, hogy nemcsak az erkölcsi tudat alkotóelemeinek viszonyát, tartalmi összefüggésrendszerét kellett tisztázni, hanem megfelelő súlyozásukat is el kellett végezni, megállapítva az összetevők egymáshoz viszonyított értékét és a rendszerben elfoglalt helyét.

A rendszer alaptagjának azt az életideált tekintettük, amelyre a tanuló morális tudatossága vonatkozik. A feladatlap nyolc megfogalmazott életideálja a következő tartalmakat képviselte: 1. becsületes átlagdolgozó; 2. a „jövő” embere; 3. vallásos beállítottságú; 4. anyagi, karrierrista; 5. dogmatikus; 6. a magánéletét előtérbe helyező; 7. polgári humanista, azaz általános emberi; 8. anarchista típus. Ezenkívül a tanulók lehetőséget kaptak arra, hogy önálló elképzeléseiket kilencedik ideáltípusnak megfogalmazhassák. Mivel nem ismerhettük előre a tanulók önálló válaszait, az itt kapott feladatok rendszerezése, tartalmi feldolgozása emberi erővel történt. Az általunk adott „zárt” vagyis készen talált ideáltípusok azonban részletekbe menően operacionalizálható struktúrák, jól mérhető logikai rendszerek alaptagjaiként funkcionáltak. Ezért jelen cikk keretében a felsorolt nyolc rendszerre vonatkozó kutatásmetodikát ismertetjük.

A következő tartalmilag leg súlyosabb, tehát a logikai összefüggésrendszerben is második legértékesebb tagnak az erkölcsi alapelveket tekintettük, amelyek a személyiség tudatos erkölcsiségének bázisát képezik. Ha azonban nem ideológiai, hanem pedagógiai—pszichológiai nézőpontból indulunk ki, akkor az erkölcsi alapelvek adott szituációkban motívumokként funkcionálnak. A motívumok érvényesülési feltételei, erőssége szoros kölcsönhatásban van a személyiség tulajdonságaival, helyesebben a tulajdonságok hierarchiájával, pozitív és negatív értékelésével. Ezért a logikai lánc következő tagja az erkölcsi tulajdonságokra vonatkozó feladat volt.

A tesztlap felépítésében az a tendencia érvényesült, hogy a személyiség belső morális tartalmai felől haladjon az objektíválódás felé. Az erkölcsi normákhoz való viszony jelentősége éppen az objektíváció folyamatában jelentkezik. Erre vonatkozik a következő kérdés. A sort egy iskolai szituációban megtörtént esethez való viszonyulás, vagyis beleéléses alkalmazási feladat zárja.

A tanuló nem tud erről a függőleges kapcsolatrendszerrel, így az életideálokra vonatkozó feladat kivételével a további négy indirekt jellegű. A tesztlap ilyen jellegű felépítése lehetőséget nyújt az egyéni morális struktúrák feltérképezésén kívül a válaszor visszamérésére is. A tanuló a legrokonszenvesebb életideál kiválasztásával megjelöli a neki leginkább tetsző típust. Ezt szubjektív típusnak neveztük el. A teljes feladatsorra adott válaszrendszer viszont megmutatja, hogy objektíve milyen struktúrához áll legközelebb. Ezt objektív típusnak neveztük.

A verbális jelrendszerrel a matematikai eszközök használatá miatt matematikai struktúrára kell áttérni. *A verbális jelrendszerre és a matematika szimbólumrendszerére épülő struktúrák megalkotása jelenti a modellépítést.*

A modellalkotás szükségessége nem a pedagógia és a matematika sajátosságában gyökerezik, tudatosan vagy ösztönösen mindenütt jelentkezik a valóság vizsgálatakor, szemléletekor s mint ilyen minden kutatási, illetve szemléletmód sajátjának tekinthető.

Bármely kutatási területen a vizsgált jelenségeket sohasem teljességükben, hanem csak bizonyos oldalukról megvilágítva tekinthetjük. Ennek oka részben a lehetőségek korlátozottsága. Az összes tényezőt — melyek között ismeretlenek is vannak — képtelenség egyszerre áttekinteni. Másrészt számunkra eleve csak bizonyos tulajdonságoknak van jelentőségük.

Az általunk vizsgált konkrét feladatot tekintve: nyilvánvalóan lehetetlen volna egy ember moralitását teljességében jellemezni. Ugyanakkor az erkölcsi tartalmak vizsgálatakor tisztázni kell azt is, hogy mely megnyilvánulásokból következtethetünk azokra. Feltételezhető az is, hogy minden tanulónak sajátos, többiekétől különböző morális struktúrája van. Mindez szükségessé teszi a kutatási módszer és terület körülhatárolását, leszűkítését. A modellalkotás lépései a szükségességét indokló tényezőkből adódnak. Esetünkben a modellalkotás a felvetett problémák megfogalmazásával kezdődik, és a kérdések megoldási módjának meghatározásával folytatódik. Ez utóbbi a feladatlap összeállítását, logikai értékelési rendjének meghatározását, valamint az így kialakult rendszeren belül felvethető kérdések megfogalmazását foglalja magában.

A felmérés alapját képező tesztlap a tanuló személyi adatait (iskola, tagozat, kor, nem), és hat feladat megoldását tartalmazza. A személyi adatokat és a feleleteket számjegyekkel kódoltuk. A matematikai modellen belül ezek a kódszámok — és csak ezek — reprezentáltak egy tanulót. Ezzel a rendelkezésünkre álló információt nem szegényítettük, hanem formalizáltuk. Ez a formalizálás — és nem a számszerű jelölésre való áttérés — a matematikai modellalkotás lényeges része. Természetesen nem szükségszerű, hogy számszerű jelölést alkalmazzunk, tetszőleges más jelölésrendszert (pl. betűket) is használhatnánk.

Ezután definiálni kellett, hogy az így nyert számcsoportok — melyek mindegyike egy tanulót reprezentált — hogyan rendelkeznek magukhoz szubjektív típust, objektív típust, tudatosságot, rendszert.

A szubjektív típust az első feleletre adott válasz — a választott életideál — közvetlenül definiálta.

Az objektív típust az egész válaszrendszerből nyertük. A kérdőív olyan, hogy minden kérdésre véges sok feleleti lehetőség van. Minden feleleti lehetőségről előre el kellett dönteni, hogy mely ideáltípusra (egyre vagy egyszerre többre is) jellemző. Ez a modellalkotás munkájának pedagógiai része volt.

Ha egy válaszhoz több ideáltípus is tartozott, akkor azt a típust választottuk, mely a szubjektív típushoz legközelebb állt. Annak eldöntésére, hogy egy adott ideáltípushoz a többi közül melyik áll közelebb, tartalmi jellegű vizsgálatokat kellett elvégezni. Ez ismét pedagógiai és nem matematikai feladat volt, melynek eredményeképpen a túloltdali — az életideálok egymáshoz való viszonyát ábrázoló — táblázat jött létre.

Az oszlopok első számjegye tehát az alaptípus, ehhez viszonyítottuk az alatta felsorolt típusok sorrendjét.

Például: egy tanuló leginkább tetszőnek (az első kérdésre adott feleletében) a polgári humanista (7.) típust választotta. A második kérdésre adott felelete azonban olyan volt, mely a becsületes átlagdolgozó (1. típus) és a vallásos beállítottságú (3.) típusra egyaránt jellemző. A mellékelt táblázat szerint a 7. típushoz a 3. áll közelebb, ezért az adott esetben a második kérdésre adott felelethez a 3. típust rendeltük. Így jártunk el a következő feleletek esetében is:

1	2	3	4	5	6	7	8	← alaptípusok
6	5	7	8	2	1	2	4	} a típusoknak az alaptípusoktól mért távolsága
3	7	1	6	1	3	3	2	
5	8	6	2	8	7	6	5	
7	4	4	3	6	4	5	3	
2	1	8	7	7	5	1	6	
8	6	2	5	4	8	8	7	
4	3	5	1	3	2	4	1	

A tudatosság fokát azzal mértük, hogy a szubjektív típust mennyire közelítik meg a többi (2. — 6.) válaszok. Pontos megfogalmazásban: Két felelet közül tudatosabbnak tekintjük azt, amelyben kevesebb válasz típusa tér el a szubjektív típustól mint a másikban. Magasabb szintű tudatosságot mutat az, ha egy esetleges típuseltérés alacsonyabb értékű válaszban jelentkezik. A válaszok ugyanis a kérdések sorrendjében csökkenő jelentőségűek.

Ilyen módon minden felelet sorhoz egy tudatossági fokot rendelhetünk, mely nem mérték, hanem csak sorszám, vagyis nem abszolút értelemben jellemzi a tudatosságot, hanem csak az összes lehetséges feleletkombinációk között jelöli ki a sorrendet. Ezt a sorszámot (melyet  $t$ -vel jelölünk) a következő képlettel fejeztük ki:

$$t = \sum_{j=1}^l \binom{6}{j-1} 7^{l-1} + 7^l \sum_{j=1}^l \binom{i_j-1}{l-j+1} + \sum_{j=1}^l 7^{l-j} (a_{j-1})$$

ahol  $l$  a szubjektív típustól eltérő típust adó feleletek száma,

$j$  a felelet sor elejétől számítva a  $j$ -edik eltérő felelet sorszáma a sor végétől számítva,

$a_j$  a  $j$ -edik eltérő felelet eltérésének mértéke (ez a mellékelt táblázatból állapítható meg).

Például legyen a hattagú felelet sor elemeinek rendszere: 1, 2, 1, 3, 1, 1. A szubjektív típustól eltérő feleletek a második és negyedik helyen vannak (hátról számítva az ötödik és harmadik helyen), tehát  $l = 2$ ,  $i_1 = 5$ ,  $i_2 = 3$ . A táblázat szerint  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 2$ .

Minél nagyobb tehát a  $t$  érték, a felelet annál kisebb mértékű tudatosságot mutat. Ha  $t = 1$ , akkor a kérdésekre adott minden válasz típusa a szubjektív típus (tisztá típusú felelet sor). Minél több válaszban és minél jelentősebb mértékű eltérés van a szubjektív típustól, annál nagyobb a  $t$  érték.

A jobb áttekinthetőség kedvéért célszerűnek látszott az így adódó  $t$  sorszámokat csoportokba összevonni. Mivel az általunk definiált  $t$  érték változása nagyobb  $t$  értékek esetén kisebb jelentőségű mint kisebb  $t$  (tudatosabb válaszok) esetén, ezért a  $t$  függvényből logaritmálással nyert  $T = \log(t) + 1$  függvény jól tükrözi a feleletek tudatosságának mértékét.

A felelet sor egészében tükröződő rendszert mutatja az objektív típus.

Modellünkön belül az objektív típust a következőképpen definiáltuk: A  $T$  „szubjektív távolságra” adott képletet rendre kiszámítjuk a többi típusra is. A 8 típus közül kiválasztjuk azt, melyre a  $T$  függvényérték minimális. Ez a típus az objektív típus. Az adott  $T$  minimális függvényérték pedig — mely a rendszer

erősségét mutatja —, az *objektív távolság*. Az objektív típus lehet a szubjektív típus, de más típus is.

Például az 1 2 2 1 3 2 feleletsor szubjektív típusa nyilván az 1. típus. Mivel azonban a feleletsorban döntő többségben a 2. típus fordul elő, objektív típusa a 2. típus.

Tudatos feleleteknél (ahol a szubjektív típus dominál a feleletsorban) a szubjektív és objektív típus azonos és a feleletsorban adott rendszer is erős.

Az eddig leírt logikai szerkezet, mely a szubjektív és objektív típusnak, a tudatosság és a rendszer erősségének a meghatározását szolgálja, elég bonyolult és hosszú műveletsort alkot. Ennek a műveletsornak a végigjárása egyetlen tanuló (kérdőív) esetén is elég hosszadalmas, az esetünkben adott többszres mintára pedig emberi erővel gyakorlatilag kivihetetlen. Elsősorban ez teszi szükségessé számítástechnikai eszközök alkalmazását.

Esetünkben az adatok felvétele (a kérdőívek kitöltése), előkészítése gépi feldolgozásra (kódolás, gépi adathordozóra, esetünkben lyukkártyára való vitele) kézi munkával; az utána következő eljárások azonban már nagysebességű számológép segítségével történtek. Így lehetséges például, hogy az általunk a szubjektív típus, tudatosság, objektív típus meghatározására alkotott bonyolult logikai műveletsor realizálása, az adott nagyterjedelmű mintára is csak néhány percnyi időt vett igénybe. Természetesen a számológépnek az adott feladatra történő programozásához sokkal több időre van szükség, de még mindig összehasonlíthatatlanul kevesebbre, mint a feladat emberi erővel történő megoldásához.

Általában elmondható, hogy nagy tömegű megfigyelés esetén, vagy ha a megfigyelt jelenségek bonyolult rendszerben írhatók le, feltétlenül hasznos a számológép alkalmazása. Egyrészt rengeteg emberi energiát takarítunk meg, sokkal gyorsabban jutunk eredményhez, másrészt az eredmények sokkal megbízhatóbbak.

Ugyancsak gépi eszközzel történhet a modell objektumain értelmezett matematikai eljárások végrehajtása is.

Esetünkben ilyen feladat volt az egyes típusok előfordulási gyakoriságának vizsgálata, és a tudatosság és rendszer erősségének egymáshoz, illetve a tanulók jellemzőihez (életkor, nem, iskola, tagozat, ideáltípus) való kapcsolatának felderítése. Az adatok nagy száma miatt ezeknek a feladatoknak a megoldása is csak számológép alkalmazásával gazdaságos.

Néhány szót az általunk *alkalmazott módszerekről és eredményekről* is kell szólnunk. Első lépésként a típusok (szubjektív és objektív) elosztását, az egyes típusokon belüli tudatosságot és a rendszer erősségét vizsgáljuk. A tudatosság és a rendszer erőssége szempontjából kiemelkedő helyet foglalt el a populáció szempontjából is első polgári humanista (általános emberi) típus.

Ezután kimutattuk, hogy az egyes típusok számszerű eloszlása hogyan függ a tanulókra adott jellemzőktől (iskolatípus, tagozat, életkor, nem). A vizsgálatot  $x^2$  próbával végeztük. Jelentősnek bizonyult az iskolatípus és a tagozat szerepe a típusok választásában. A tanuló neme már kevésbé motiválta a választásokat, a különböző korcsoportok között pedig már egyáltalán nem mutatkozott eltérés. Ezt a vizsgálatot tovább mélyítettük, melynek eredményeképp új adatokat kaptunk arra vonatkozóan, hogy a tanuló neme milyen iskolatípusban nagyobb, illetve kisebb jelentőségű.

A tudatosság és rendszer erősségének kapcsolatát korrelációs számítással vizsgáltuk. A kapcsolat a tanulókra adott jellemzőktől függetlenül erősnek bizonyult.

Az itt példaként felsorolt néhány eljárásnál a következőket jegyezzük meg. Az általunk vizsgált modellben nem mennyiségi, hanem minőségi kategóriák: ideáltípusok, iskolatípusok, a tanulók neme, tagozattípus — játszanak szerepet. A tudatosság és a rendszer erősségére adott  $T$  mérték ugyan egy rendezést (rangsor) határoz meg a különböző feleletek között, de nem ad abszolút mértéket. Így csak olyan matematikai eljárásokat alkalmazhattunk, melyek minőségi kategóriákra és nem mért (mennyiségi) értékekre vonatkoznak. Így például előbb említett korrelációs számítást is csak kritikával alkalmazhattuk.

Esetünkben a matematikai eljárások eredményei közvetlenül értelmezhetők. Például: a szubjektív és objektív távolság erős korrelációja közvetlenül bizonyítja a tudatosság és a rendszer erős kapcsolatát.

Sohasem szabad azonban megfelelkezni a kapott eredményeket szolgáltató modell alkotásakor tett korlátozásokról. Például a  $T$  szubjektív távolság csak annyiban jellemzi a tudatosságot, amennyiben a felmérőlap kérdéseire adott válaszokból az általunk meghatározott módon kikövetkeztethető. Ha például a következtetési rendszer valamely ponton hibás, akkor a szubjektív távolság nem mutatja helyesen a tudatosság mértékét. Természetesen ugyanezek a korlátozások terhelik a szubjektív távolságtérből nyert más információkat is (pl. a tudatosság függése az iskolatípustól stb.).

A kézhez kapott eredmények természetesen nem jelentették, mint ahogy egyetlen vizsgálatban sem jelenthetik a munka végét. Előttünk állt még a pedagógia szemszögéből legnehezebbnek tűnő feladat: a kapott eredmények újbóli transzformálása, visszatérés a matematika logikájától a neveléstudomány rendszerére, vagyis a képletek, számtáblázatok értelmének verbális kifejtése.

A team-munka jelentősége ebben a fázisban is igen nagy. A kapott táblázatok, értékek először áttekinthetetlennek tűnnek a másféle jelrendszerhez szokott pedagógiai kutató számára. A „visszakódolást” a matematikus érthető, világos szóbeli értelmezése nagymértékben megkönnyítheti.

Munkánk egészét jelentősen előrevitte, minden szakaszában segítette az a törekvés, hogy a másik szakterület vonatkozó problémarendszerét, számbajöhető és alkalmazott módszereinek előnyeit és korlátait részletekbe menően értsük és elemezzük. Ezt a másik terület iránti érdeklődés és ügyszeretet nélkül nem lehet megvalósítani.

Bármilyen alaposan átgondolt, világos struktúrájú felmérés feldolgozásáról legyen szó, a pedagógus munkája ellaposodik a matematikus alkotó segítségével. És fordítva: az eredményeket olvasni nem tudó, vagy akadozva, esetleg helytelenül olvasó pedagógus tönkreteszi a matematikus minden fáradozását. Ezért helytelenül gondolkodik, aki úgy véli, hogy a munka bizonyos fázisait a pedagógusnak, más fázisait a matematikusnak kell elvégeznie. Tapasztalataink szerint csak a tartalmában mindvégig közös, egy feladatra koncentrááló munka hozhat eredményt, mely feladat pedagógiai és matematikai aspektusból egyaránt feldolgozható.

Vizsgálatunk feltételeinek, menetének, módszereinek ismertetésével a matematika alkalmazásának egy — már járt — útját szerettük volna bemutatni. Természetesen végtelen sok variáció lehetséges, de az biztos, hogy az intuitíve létrehozott elméleti struktúrák mellett a pedagógiában is előbb-utóbb tényné válik a tudás matematizálása és formalizálása. Ez pedig felmérhetetlenül jelentős lépés lesz a neveléstudomány egyértelmű, tartalmilag világos és áttekinthető rendszere felé.