örökség elmarad, attól kezdve durva jelenetek állandósultak a házban. A fiúnak nem egyszer kellett a tettleg is bántalmazott édesanya védelmére kelni. A szülők szerencsétlen élete nemcsak a megtörtént jelenetek emlékeivel zavarta a fiú életét, hanem szorongó érzéseket állandósított benne a jövőre vonatkozóan is. Ez az eset egyébként rávilágít arra is, hogy a *kultúráltság csak abban az esetben válik a gyermek javára, ha az lelki kultúrát jelent, azaz ha nemes idealizmussal és mély emberi érzésekkel párosul.*

Összegezve az eddigi megállapításokat, láthatjuk, hogy kedvezőtlen művelődési és anyagi körülmények közt élő gyermekek testi és lelki fejlődése kedvezőtlen eredményeket mutat. Az ilyen gyermekek halálozási arányszáma nagy, a testi fejlődésben elmaradnak, sok közöttük a szellemileg fogyatékos, tanulmányi eredményük gyenge és lelki-szellemi értékek kialakulásában gátolja őket biológiai szükségleteik ki-nem-elégítettsége. Megmérhetetlen szellemi és erkölcsi értékek vesznek el e miatt a nemzet számára. Ezzel szemben tény az is, hogy lelki kultúrából és szociális jólétből bőven fakadnak általános emberi és nemzeti értékek, aminek pedagógiai következményeként *a legszélesebb körű szociális gondoskodás és a lelki kultúra kiterjesztésének elvét nemzetnevelésünk és egész nemzeti politikánk alapvető tételének kell elismernünk.*

Somos Lajos.

A MENNYISÉGTANÓRAI MAGYARÁZAT PROBLÉMÁI.

Bevezetés. A matematika logikai tantárgy, tanításában tehát a megértetésen van a súly. Ha a tanulók értik, a megtanulás már jóval kevesebb munkát ad. Ezért a matematikus tanárnak a magyarázatra való készülés igen sokszor nagy munkát és komoly gondot jelent. Ebben a nehéz és felelősséggel járó munkában szeretnék kartársaimnak segítségére lenni azzal, hogy a magyarázat főbb problémáit és a problémák megoldására bevált módszereket logikus rendben összeállítom és pedagógiai szempontból megvilágítom. Elsősorban az általános problémákat tárgyalom, tehát azokat, amelyek egyaránt előfordulnak mindegyik tanalakban. Ilyen általános problémák különösen a magyarázat logikai felépítésével és érthető előadásával kapcsolatban merülnek fel; dolgozatom nagyobbrészt ezekkel foglalkozik.

A probléma felvetése, heurisztika. A magyarázat előtt felvetjük a problémát, amellyel foglalkozni fogunk. Lehetőleg úgy, hogy a diák az illető problémára logikai szükségszerűséggel jusson. Például a régebbi anyag átismétlése vagy számonkérése után közvetlenül ehhez kapcsolja a tanár az új problémát, mint a régebbi eredmények kibővítését, illetve továbbfolytatását. Vázolja esetleg, hogy körülbelül milyen úton fog haladni és milyen célt akar elérni. Néha célszerű a bizonyítandó tételt is előrebocsátani (de csak a probléma felvetése után!). Ha a tétel kimondása akadályba ütközik, mert a benne szereplő fogalmakat még nem ismertettük, akkor is hasznos lehet esetleg, ha a tételt valamilyen módon körvonalazzuk. Igen sok olyan levezetés van, amelyben a bizonyítás egyetlen tétel alkalmazásán alapszik. Pl.: Az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra. Ennek a tételnek bizonyításában a pontnak egyenestől való távolságára vonatkozó tétel játssza a döntő szerepet. A bevezetésben az ilyen tételt ajánlatos megemlíteni és megjegyezni, hogy a bizonyítás lényegében az illető tétel alkalmazásán fordul meg.

A lényeg az, hogy mindig problémából vagy problémákból indulunk ki. Pl.: Láttuk, hogy ha egy szög trigonometrikus függvényeit ismerjük, akkor a kétszeres szög függvényeit is kiszámíthatjuk. Próbáljuk meg, vajjon a félakkora szög függvényeit is ki tudjuk-e valamilyen módon számítani? E végett összefüggéseket keresünk az egész és a félszög függvényei között stb.

Csak látszólagos probléma azonban az, hogy: »Be akarjuk bizonyítani a következő tételt:...«

A kitűzött cél eléréséhez részletcélokat tűzünk ki. Vagyis problémából indulunk ki és mindvégig problémákon keresztül jutunk el a végeredményig. A magyarázat tehát (különösen a munkáltató tanalakokban) rendkívül hasonlít a példák és feladatok megoldásához.*

Legjobb természetesen az volna, ha a problémát is maguk a tanulók vetnék fel. Erre azonban nem igen jut idő.

A középiskolában tehát nem elég egy tételt csak kitűzni és bebizonyítani, hanem azt is meg kell mutatni, mikép vetődött fel és bizonyítására hogy jöhetünk rá. A heurisztikát háttérbe szorító »Satz—Beweis« stílus alkalmazása az olyan természetrajztanításhoz hasonlít, amely a természetet szárított növényeken és kitömött állatokon ismerteti meg. Éppen azt hagyja ki, ami annyira vonzóvá teszi a természetet: az életet. A matematikába az életet a heurisztika önti. Ezért nem értek egyet azokkal, akik a »Satz—Beweis« stílust előadások közben is, vagy pedig bevezetésnek szánt könyvben, sőt középiskolai tanításban is alkalmazzák.

Bármely levezetés tehát két részből áll; heurisztikából és bizonyításból. Természetesen éles határt húzunk tanítás közben a kettő közé. Nagyon rontja a tanuló kritikai érzékét, ha a heurisztika és a bizonyítás összefolyik.

A probléma felvetésének nagyon sok eszköze van. Gyümölcsöző eszköz többek között az egyik legősibb heurisztikus mód-

* V. ö. *Strausz Antal:* A mennyiségtani példák tanításáról. Nevelésügyi Szemle II. 444. l.

szer, a szemléletből való kiindulás. Igen jól bevált azonkívül az induktív módszer is. Ennek még az az előnye is megvan, hogy az abstraháló képességet, a matematikai gondolkodásnak ezt a fontos összetevőjét is fejleszti. Esetleg a levezetésre is induktív úton jövünk rá. Igen jól beválnak azonkívül a gyakorlati életből és a fizikából vett feladatok. Hogy mennyire nem lehet a heurisztikában a gyakorlati feladatokat és fizikai meggondolásokat nélkülözni, azt talán legjobban abból láthatjuk, hogy a mértan földmérési problémák kapcsán jött létre és fejlődött ki csíráiból. A differenciál- és integrálszámítás feltalálásában pedig fizikai problémáknak is döntő szerepük volt.

A heurisztikának jó eszköze továbbá a mérés és becslés. Pl. a kör területére vonatkozó képletet a köréje írt négyzet területével való összehasonlítással tehetjük nyilvánvalóvá.

Alsó osztályokban nélkülözhetetlenek ezek a most ismertetett módszerek, mert a logikus heurisztikára a gyermekek még nem elég érettek. Felsőbb osztályokban azonban a heurisztikában is egyre jobban előtérbe kerülnek a logikai módszerek. Ezek közül főleg a következő típusok gyakoriak: megpróbáljuk, hogy valamilyen praemissából milyen következtetéseket vonhatunk le. További módszer az általánosítás és az abstractio. Igen hasznos heurisztikus eljárás az is, ha oly módszert, amely például az egyenletek tárgyalásában beválik, átültetünk más területre, pl. a geometriába (analitikus geometria) vagy a régi műveleti szabályokat alkalmazzuk új számokra stb. Ez az eljárás főkép azért fontos, mert új tételeket legtöbbször ezen a módon fedeznek fel. (A fizikában ezt könnyen ellenőrizhetjük. A matematikában a nagy matematikusok heurisztikájáról jóval kevesebb történeti adatunk van.) A logikus heurisztika is természetes módszer, ezért a magam részéről mesterkéltnek tartom ama kollégám eljárását, aki a komplex számok gyökvonását induktív úton vezette le. A konkrét és speciális esetek tárgyalását nemcsak heurisztikai célra szokás használni, tehát nemcsak arra, hogy indukció és abstrakció útján általános eredményeket vezessünk le belőle, hanem didaktikai fogásként is, nehéz részek könnyebb megértésére. Könnyebben fogja fel a tanuló a levezetést, ha először egy konkrét esetén mutatjuk be az általános meggondolásokat. A speciális eseteket és konkrét számokat tehát kétféle didaktikai célra is használjuk. Ezt a kétféle esetet nem szabad összetéveszteni vagy pedig egy kalap alá venni.

Logikus felépítés. Amikor a magyarázatban rátérünk a tárgyra, vigyázunk, hogy előadásunk logikailag jól felépített, kerek egész legyen. Már a levezetést is ennek megfelelően választjuk ki. Ha levezetésünk a tárgy lényegéből indul ki és a tárgy természetéhez alkalmazkodik, akkor legtöbbször magától adódik a szilárd logikai váz. Ha a tanuló valamelyik lépést elfelejti is, de a logikai vázra vagy — amint mondani szokták — a gondolatmenetre emlékszik, az ilyen levezetésben az illető lépést pusztán logikus okoskodással könnyen rekonstruálja. Ha levezetésünk a tárgy természetéből folyik, igen sokszor az egész bizonyítás egyetlen alapgondolaton épül fel. Ez az oka, hogy a matematikának bármely területét vizsgáljuk, azt tapasztaljuk, hogy még a legátfogóbb jelentőségű, legmélyebb tételeknek is többnyire meglepő egyszerű bizonyításuk van. Ha azonban nem fordítunk elég gondot rá, hogy a levezetés a tárgy, illetőleg tétel természetéből folyjon, hanem csak arra törekszünk pl., hogy minél elemibb eszközökkel érjük el a célt, akkor a logikai felépítés nagyon sok esetben rossz lesz. A rossz felépítést legtöbbször abból ismerhetjük fel, hogy igen sok helyen el lehet hibázni a levezetést. Mint egy rossz viskó, amelyhez akárhol nyúlunk hozzá, az egész összedől, olyan az efféle levezetés is. Nincs meg a logikai szükségszerűség, amely — mint egy vasbetonváz — megakadályozná az egyes téglák kihullását. És nincs egységes, áttekinthető képe az egész levezetésnek, nem lehet észrevenni, hogy valahol hibás lépést követtünk el, amely sehogy sem illik a tárgyalás menetébe. Jó levezetésben az ilyesmi nehezebben fordul elő. Pl. amikor bebizonyítjuk, hogy a kerületi szög félakkora, mint a vele egy íven fekvő középponti szög, a bizonyítás három mozzanatból áll. De akármelyiket hibázzuk el, azonnal rájövünk, hogy elvétettünk valamit. Mint ahogy, ha ránézünk egy házra, azonnal észrevesszük, ha egy tégla kijjebb csúszott.

Különösen veszedelmesek a láncszerű levezetések, amelyeknek nincs alapgondolatuk, sem pedig szilárdan összetartó, logikus vázuk. Minden lépés egyformán fontos bennük. Ha akárhol egyetlen lépést elvétünk, az egész későbbi eredmény rossz lesz. Hasonlóan a lánchoz, amely kútba esik, ha a sok láncszem közül akármelyik eltörik. Ilyen láncvezetéssel vezették le régebben a középiskolában az analitikus geometriának pont és egyenes távolságára vonatkozó képletét. A pontból merőlegest húztak az egyenesre. Az egyenes és a merőleges metszéspontját kiszámították. A metszéspont és az adott pont távolságát pedig a távolság képletével számították ki. Ezt az unalmas és hosszú levezetést csak azért választották, hogy kikerüljék az egyenlet Hesse-féle normálegyenletének tárgyalását. Pedig a természetes levezetés ezzel együtt sem lenne hosszabb, azonkívül a közbeeső lépések mind önmagukban is hasznos és érdekes tételek lennének. Ilyen esetben inkább hagyjuk ki az egész tételt, mint ahogy a középiskolai tantervben is kimaradt a pontnak egyenestől való távolságára vonatkozó képlet. Még ez is jobb, mint ha ilyen nyakatekert levezetéssel romboljuk a diákok logikai érzékét, csak azért, hogy egy valamivel nehezebb segédtételt vagy meggondolást megtakarítsunk.

A logikus felépítéshez tartozik az is, hogy érezni lehessen a határozott irányú haladást a kitűzött cél felé. Ezért a tanár óvakodik a logikai kanyargásoktól és kitérésektől. Ha a tárgyalásba szervesen bele nem tartozó segédtételre van szükség, azt is lehetőleg már a levezetés előtt bebizonyítja, úgyhogy a levezetés közben még a segédtétel bizonyítása végett se legyen szükség kitérésre.

Áttekinthetőség. A logikus felépítéshez hozzátartozik az áttekinthetőség is. Ezért, mint már említettük, először is a magyarázatnak részek szerint tagolódni kell. Írásbeli fogalmazásban vagy könyvben pedig az összetartozó részeket fejezetbe szedjük és mindegyiknek adunk a lényeget kifejező címet is (nemcsak annyit írunk fölébe, hogy pl. XI. fejezet).

Az áttekinthetőséget fokozhatjuk célszerű jelölésekkel és ügyesen összeállított segédtételekkel. Inkább kétszer annyi ideig tartson a magyarázat a jelölések bevezetése és a segédtétel bizonyítása miatt. Nem sajnáljuk az időt, ha ezzel esetleg mérföldes képleteket és áttekinthetetlen számolásokat takaríthatunk meg. Áttekinthetetlen levezetést ugyanis még a legjobb tanuló is elfelejt 2—3 hét alatt. Ráadásul a levezetés formális képzőereje is nagyrészt elvész az áttekinthetetlenség miatt. Az áttekinthetőség kedvéért, ha kell, még azt az áldozatot is meghozzuk, hogy inkább kevésbbé elemi úton bizonyítunk.

Rontja az áttekintést, ha minden apróságra részletesen kitérünk. Ha apró, alkalomszerű (máshol fel nem használható) fogásokat alkalmazunk átfogó módszerek helyett. Ha mindjárt a legelső alkalommal a lehető legáltalánosabb feltételek mellett a legáltalánosabb eredményt akarjuk levezetni stb.

Az áttekintést elősegíti, ha a magyarázatot a végén összefoglaljuk, vagy még jobb, ha összefoglaltatjuk valamelyik tanulóval.

Az érthető és világos előadás általános követelményei. A magyarázat megértéséhez feltétlenül szükséges, hogy fokozatos legyen. Vagyis nem ugrunk át egyes részeket azzal a megjegyzéssel: »Ez úgyis magától értetődik!« Sőt, nemcsak nem ugrunk, hanem még a túlságos gyors haladástól is óvakodunk. Mindent, ami új a gyermeknek, külön mondunk meg. Hogy ezt a didaktikai tételt jobban lássuk, vegyük szemügyre a következő mondatot: (A háromszög középpontjáról beszélünk) »Tehát van egy pont, amely a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van. A háromszögnek ezt az ú. n. középpontját úgy szerkesztjük meg, hogy az oldalakra felezőpontjukban merőlegeseket állítunk és ezek metszéspontját megkeressük.«

A magyarázatnak a második mondata didaktikailag teljesen rossz. Ebbe az egyetlen mondatba legalább öt önálló mondanivaló van sűrítve. Ha tehát azt akarjuk, hogy meg is értsék, legalább öt önálló mondatban adjuk elő. Külön mondjuk meg, hogy azt a bizonyos pontot a háromszög középpontjának nevezzük. Sőt mivel ez definíció, tehát fontos rész, lassan, hangsúlyozva meg is ismételjük.

(Még jobb, ha a diákok ismétlik el.) Tehát erre az egy mondanivalóra már legalább két külön mondatot szánunk. Aztán így folytatjuk: »A megszerkesztést a következő módon végezzük.« Vagyis legalább egy mondattal jelezzük, hogy az általános tárgyalásról a szerkesztésre tértünk át. (Ez nagyon fontos! Ebből látja meg a tanuló, hogy tulajdonkép mit akarunk.) Legalább egy-egy mondatot kell azonkívül rászánni a következőkre is: »Az oldalak felezőpontjaiban merőlegeseket húzunk. Megkeressük ezek metszéspontját. Az így kapott metszéspont lesz a háromszög középpontja.« Úgyhogy, amit én elrettentésül fentebb egy mondatba sűrítettem, azt a tanár magyarázat közben legalább 6—7 mondatban adja elő, minden egyes mondanivalóra okvetlenül rászán legalább egy mondatot.

Sűríteni csak olyan részeket lehet, amelyeket a tanuló már jól ismer. Ilyenkor sem célszerű azonban a rövidséget a mondatok telezsúfolásával fokozni. Célravezetőbb, ha egyes műveletsorozatokat gyűjtőfogalmakkal fejezünk ki. A rövidséget fokozhatjuk ügyesen választott elnevezésekkel is.

Sokszor előfordul, hogy egy mondanivaló már benne van burkoltan valamelyik előbbiben. Pl. »A gömbháromszög szögeinek összege 180 és 540 fok között van.« Ebben már benne van, hogy nem érvényes a gömbháromszögekre a síkgeometriának az a tétele, hogy a háromszög szögeinek összege 180 fok. Célszerű azonban, ha a tanár nem elégszik meg azzal, hogy gondolja magában: »Ezt még a vak is látja!« — és a következtetés levonását rábízza a diákokra, hanem rámutat határozottan és félreismerhetetlenül:: »Hasonlítsuk össze ezt az eredményt a síkháromszögekre vonatkozó tétellel! Mennyi a síkháromszög szögeinek összege? (A diákok megmondják, hogy 180 fok.) Mint látjuk, a gömbháromszögekre ez a tétel nem érvényes. A gömbháromszög szögeinek összege ugyanis mindig nagyobb 180 foknál.«

Sohasem elégszünk meg tehát azzal, hogy valamely eredmény vagy tétel burkolt módon benne van tárgyalásunkban, hanem a tanítványok bevonásával világosan rámutatunk az illető eredményre.

Hasonlóan vagyunk a logikai vázzal is. Itt sem várunk arra, hogy a diák ezt magyarázat közben önkénytelenül észreveszi. Így az előbb említett esetben is a tanár előbb megmondja, hogy össze akarja hasonlítani a gömbi és a síkháromszöget. Nem volna azonban helyes, ha minden előzetes megjegyzés nélkül megkérdezné, mennyi a síkháromszög szögeinek összege. Amikor megmondták, megkérdezné, melyik a nagyobb, a gömbháromszög szögeinek összege vagy a síkháromszögé. Az utóbbi esetben a diák gondolkodása elatomizálódik, csak a részleteredményekre terjed ki. Különösen a kérdve-kifejtő módszer helytelen alkalmazása vezethet könnyen arra a hibára, hogy a gondolatmenet nem domborul ki eléggé. A diák sokszor téglahordóvá süllyed, tevékenysége csak abban merül ki, hogy a tanár kérdéseire egy-egy téglát kifarag vagy elhelyez egy olyan levezetésben, amelyet teljesen a tanár épített fel, de hogy miképen, azt a diák nem látja tisztán. (Természetesen ennek nem a kérdve-kifejtő módszer az oka, hanem aki rosszul alkalmazza.)

A lényeg kiemelése. A logikus felépítés és az érthető, világos előadás megköveteli, hogy a lényeget emeljük ki. Nem igaz a matematika területén sem, hogy minden egyformán fontos, mert ha akármit elvétünk, az egész levezetés hibás lesz. A magyarázatban ugyanis valamely rész fontosságát nem azzal mérjük, hogy elvétése milyen következményekkel jár, hanem azzal, hogy az illető rész mennyiben hat irányítólag a levezetés egész menetére s az *egész* tárgyalás és végeredmény megvilágításához mennyiben járul hozzá.

A »minden egyformán fontos« gyakorlatilag azt jelentené, hogy semmi sem fontos. Ha a magyarázatban semmit sem emelünk ki, semmit sem tartunk a többinél lényegesebbnek, akkor az egész magyarázat szétfolyik.

Ezért mindig hangsúlyozzuk azokat a meggondolásokat, amelyek a tárgyalás menetét irányítják, pl. »A bizonyítást az előbbi esetre vezetjük vissza«. Kiemeljük azonkívül az újonnan bevezetett definíciókat és különös nyomatékkal a levezetett tételt, illetve a nyert eredményeket. Általában nem a képletet, hanem a gondolkodó értelem munkáját, ahogyan mondani szokták, a »józan parasztésszel« belátható meggondolásokat hangsúlyozzuk. A képletek, műveletek legtöbbször csak eszközei a gondolkodó értelemnek.

Hogy tüntetjük ki a többi közül, ami fontos? Semmi esetre sem elég így: »Ami most következik, azt a jegyzetükben húzzák alá!« Vagy (mivel a jegyzés ritka) azt mondjuk: »Ez igen fontos rész!« Hanem úgy szerkesztjük meg a magyarázatot, hogy a diák lássa az illető rész szerepét, pl. hogy az egész levezetés az illető meggondoláson alapszik. Azonkívül több időt is szánunk a fontosabb részekre. Különösen a meghatározások és a végeredmény elmondása jóval lassúbb és hangsúlyozottabb a többi résznél. Többnyire célszerű, ha egész lassan beszélve, hogy majdnem jegyezni lehessen, meg is ismételjük ezeket vagy a diákokkal megismételtetjük.

Ha a tételben jelölések, képletek fordulnak elő, a bennük szereplő változók jelentését a tétel kimondása alkalmával még egyszer megmagyarázzuk (illetőleg a tanulók bevonásával kifejtjük; dolgozatomban csak az egyszerűbb kifejezésmód kedvéért vettem alapul az előadó alakot). Legtöbbször ajánlatos a jelöléseket és képleteket még akkor is megmagyarázni a tétel kimondásakor, ha a kiinduláskor ezekre részletesen kitértünk.

Hasznos lehet, ha megmutatjuk, miképen lehet a tételt szemléletesen kifejezni. Ha a tétel természete megengedi, okvetlenül be-mutatjuk érvényességét legalább 2—3 egyszerű példán. Sok esetben megkönnyíti a tétel megértését, ha egy kissé diszkutáljuk, pl. rátérünk egy-két érdekes következményére vagy valamelyik alkalmazására. Megesik, hogy a következmények és az alkalmazások jobban megvilágítják a tétel értelmét, mint a levezetés és a megokolás.

Hacsak lehet, szemléltetjük is a tételt. A szemléltetésnek a magyarázatban döntő szerepe van.

Szemléltetés. Általános pedagógiai elv, hogy minél többet szemléltessünk. Lélektanilag és ennélfogva pedagógiailag is egészen más lesz a hatás, ha szóval mondunk valamit, vagy ha felírjuk ugyanazt a táblára, vagy pl. hosszas magyarázás helyett a tanulónak kezébe adjuk az illető mértani idomot. Egyik tanulóra esetleg az írás hat inkább, a másikra a szó. Sohasem szabad tehát elfelejteni, hogy a beszéd a gondolatközlésnek csak egyik, sok esetben nem is a legfontosabb eszköze. Így pl. egy háromszögben a magasságot piros vonallal húzzuk meg, az alapot és a rajta fekvő két szöget barnával. Jobban és előbb megérti az osztály, hogy mi a feladat, mint ha részletesen elmagyarázzuk, hogy adva van az alap, a rajta fekvő két szög, ki kell számítani a magasságot.

Általános tapasztalat, hogy az ábrákkal és szemléltető eszközökkel nem szabad takarékoskodni, mert amennyi időt megnyerünk egy ábra mellőzésével, legalább annyit elvesztünk azzal, hogy jóval lassabban értik meg. És még a mellett tökéletlenebb is lesz a megértés.

A szemléltetés gyakorlati megvalósításával itt nem foglalkozhatunk, mert az magában is külön tanulmány.

Sólyi Antal.

KISEBB KÖZLEMÉNYEK.

Pedagógiai értekezlet Egerben.

Az új magyar lélektan a líceumokban. — Gyermektanulmányi munkaközösség. — Együttes munka az Egri Nevelők Körében.

Várkonyi Hildebrand egyetemi tanár és volt tanítványai, munkatársai október 5—7-én Egerben tartották első, igen termékeny hatású összejövetelüket. Értekezleteiken a magyar nevelés időszerű kérdései közül különösképen a líceum számára megírandó új lélektan-könyv kérdésével, valamint a magyar gyermek lelki rajzának összeállítását megelőző kutató munkával s ezzel kapcsolatos eljárásokkal foglalkoztak.

Az *új lélektan-könyv megírására* vonatkozólag egységes vélemény alakult ki, amelyet Várkonyi Hildebrand a következőkben fog-